

非負値行列因子分解入門 ～音響信号処理を題材として～

亀岡弘和

日本電信電話株式会社
NTTコミュニケーション科学基礎研究所
kameoka@cs.brl.ntt.co.jp

部分空間法研究会 2010年7月26日

目次

1. 非負値行列因子分解(NMF)とは

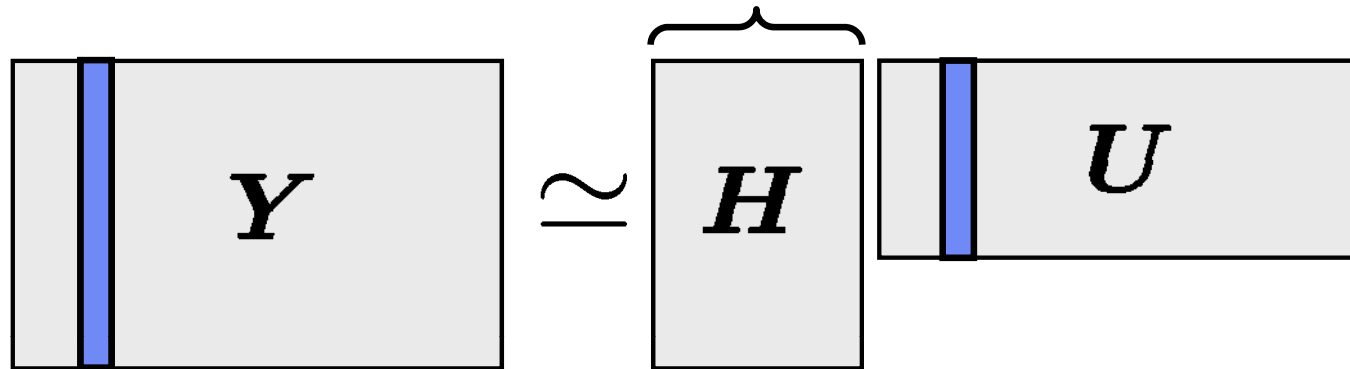
- 何に使えるのか(音響信号処理を題材として)
- どのような性質があるのか
- どのように求めるのか
- 統計モデルとしての解釈とアルゴリズムの一般化
- 他の技術とどう関係しているのか

2. 複素NMF [H. Kameoka et al., 2008]

- NMFにおける問題点
- 解決のためのアイデア
- NMFとどう関係しているのか

非負値行列因子分解(NMF)とは

- 非負値行列を2つの非負値行列の積で表現



- 行列因子分解の応用場面
 - ブラインド信号分離(Blind Signal Separation)
 H : 混合行列 U の各行: 源信号
 - 次元圧縮
 H の各列: 基底ベクトル U の各列: 結合係数

なぜ非負値なのか？その意図は？

- データ行列の非負性

- 実世界には非負値データが多い
(例) パワースペクトル, 画素値, 度数,

- 基底行列の非負性

- 「非負値データの構成要素もまた非負値データであるべき(でないとう物理的に意味をなさない!)」
という考え方

(例) 負の値をもったパワースペクトルなんて解釈のしようがない

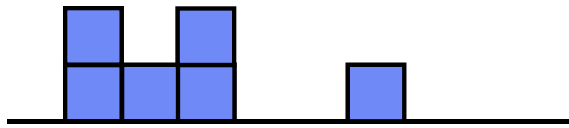
- 係数行列の非負性

- 構成要素の混ざり方は「足し算」のみ
- 係数行列をスパースに誘導 → 基底の情報量をアップ

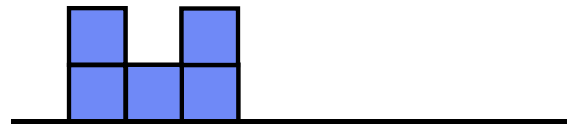
係数行列の非負性について

- 係数が負の値を取っても良い場合

観測データ



基底ベクトル



係数

$\times 1$

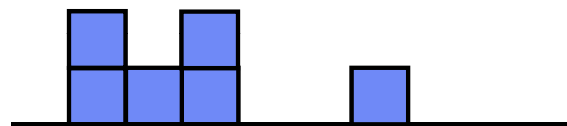


$\times 1$



$\times (-2)$

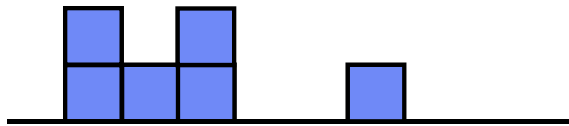
+)



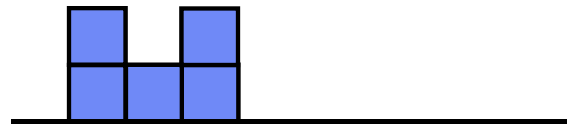
係数行列の非負性について

- 係数が負の値を取ってはならない場合

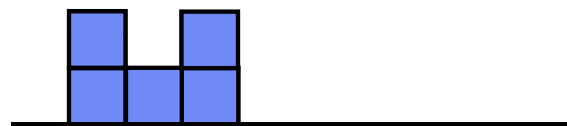
観測データ



基底ベクトル



+)



係数

×1

×0

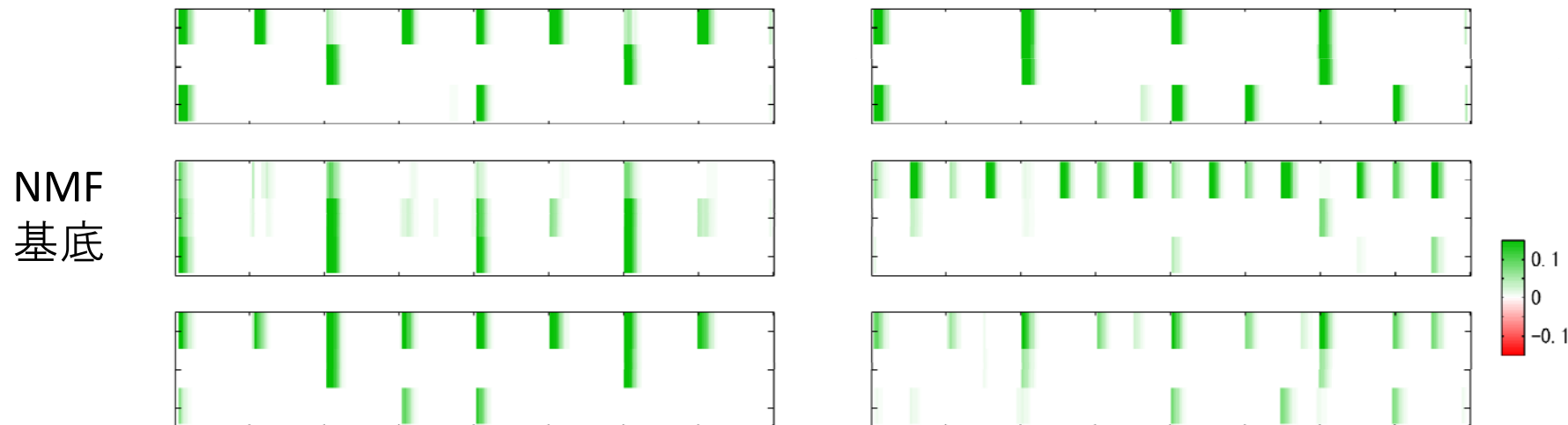
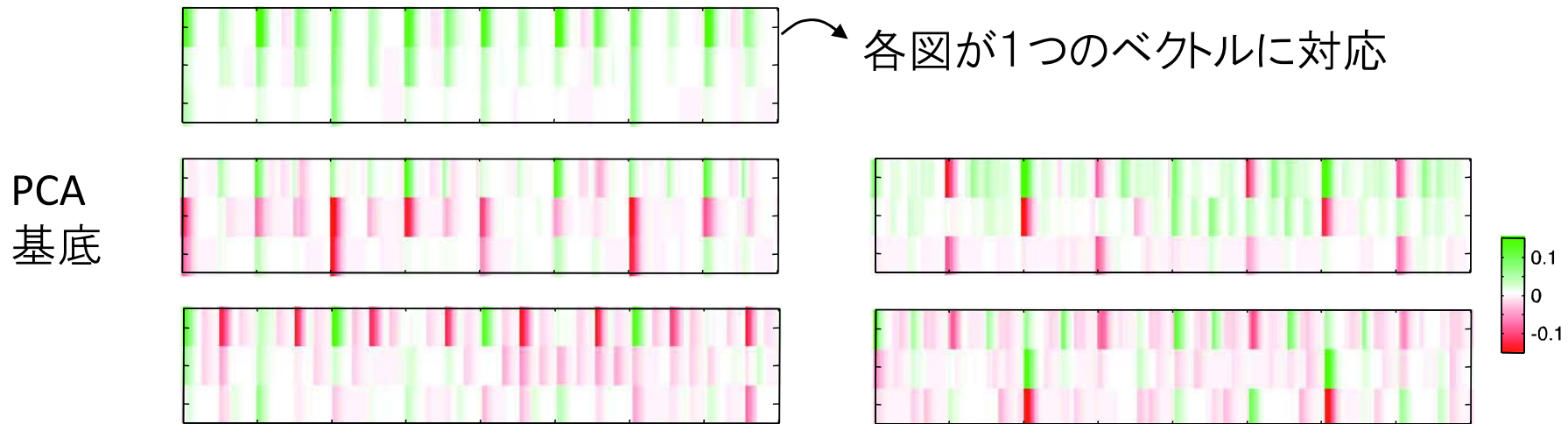
×0

スパース

PCAとNMFの比較



観測データの平均値ベクトル
(ハイハット/スネアドラム/バスドラムの音量パターン)



NMFが生まれた背景

- 画像処理分野で生まれた技術 [D.D. Lee & H.S. Seung, 1999]
 - 顔画像から顔パーツを抽出するのが目的
 - 概念自体は90年代前半に登場 [P. Paatero & U. Tapper, 1994]

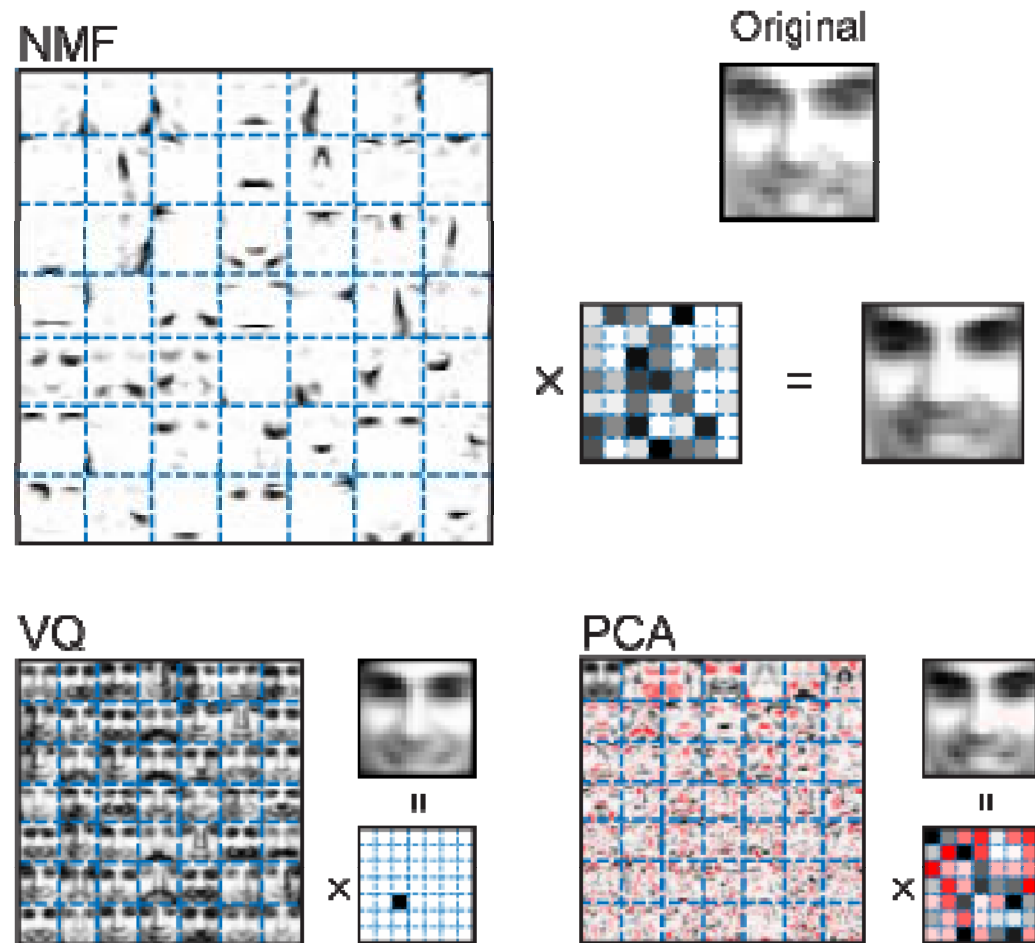
- 音のスペクトルを画像と見なして適用(後述)
 - 音声分離・自動採譜等

[P. Smaragdis et al., 2003]
以降極めて多数...

- 効率的な反復アルゴリズム [D.D. Lee & H.S. Seung, 2000]

$$H_{k,i} \leftarrow H_{k,i} \frac{[YU^T]_{k,i}}{[HUU^T]_{k,i}}$$

$$U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} \frac{[H^T Y]_{i,j}}{[H^T H U]_{i,j}}$$



NMFで音声スペクトログラムを分解してみる

• 音響信号 $y(u) \in \mathbb{R}$

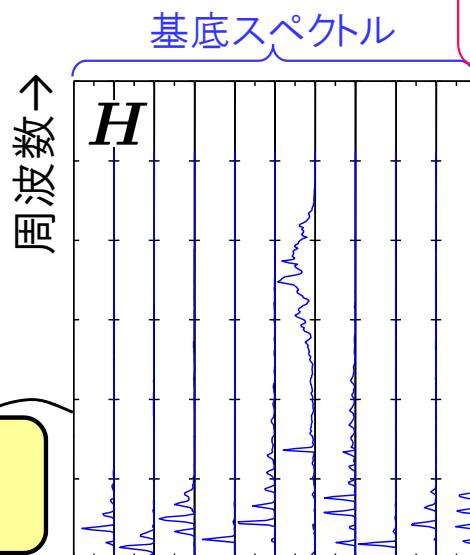
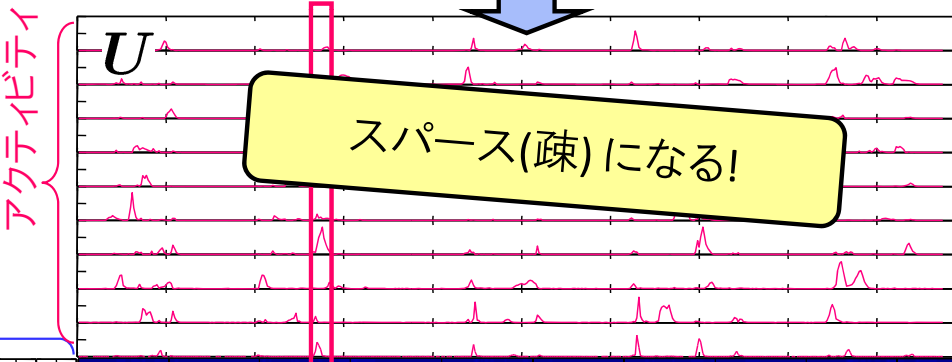
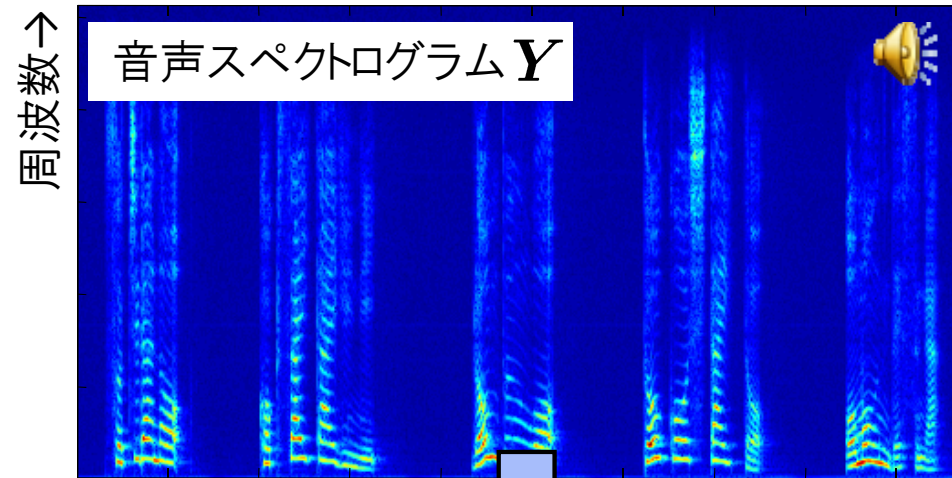
↓ 短時間フーリエ変換
(時間周波数分解)

$$Y_{\omega,t} = \int W(u)y(u+t)e^{j\omega u} du \in \mathbb{C}$$

↓ 絶対値をとる

$|Y_{\omega,t}|$: 時刻 t に周波数 ω の成分が
どれほど含まれているか

$$Y \simeq HU \quad (H \geq 0, U \geq 0)$$



低ランクスペクトログラム HU

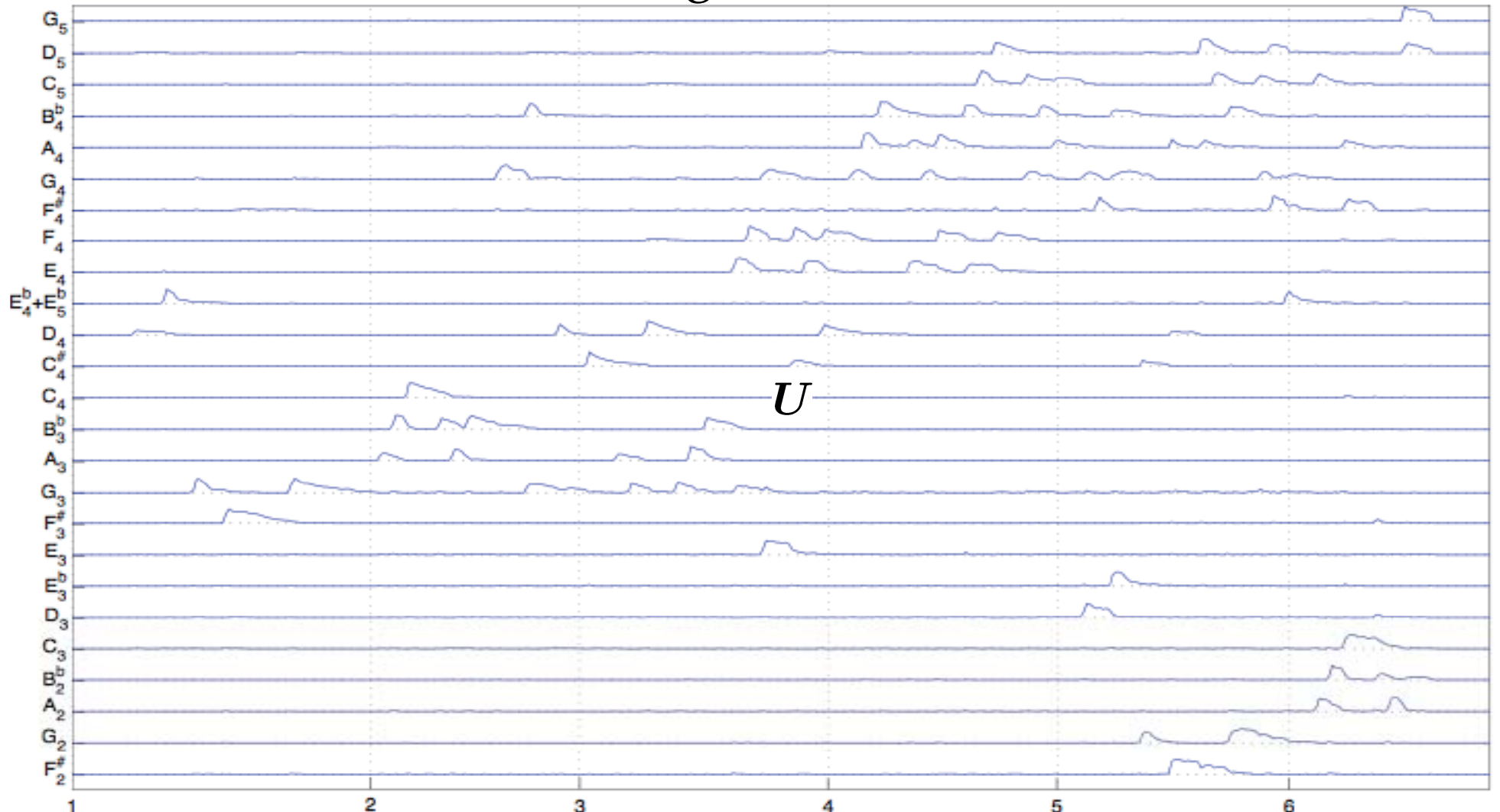
基底数10

基底数30

何に使えるのか？ (1/3)

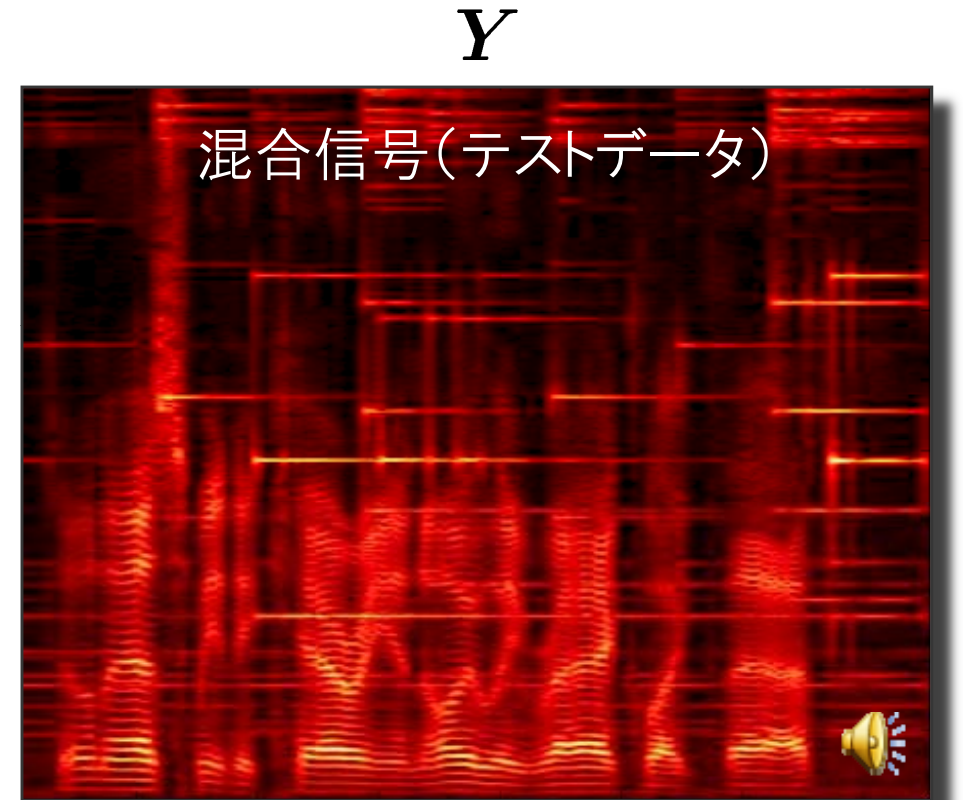
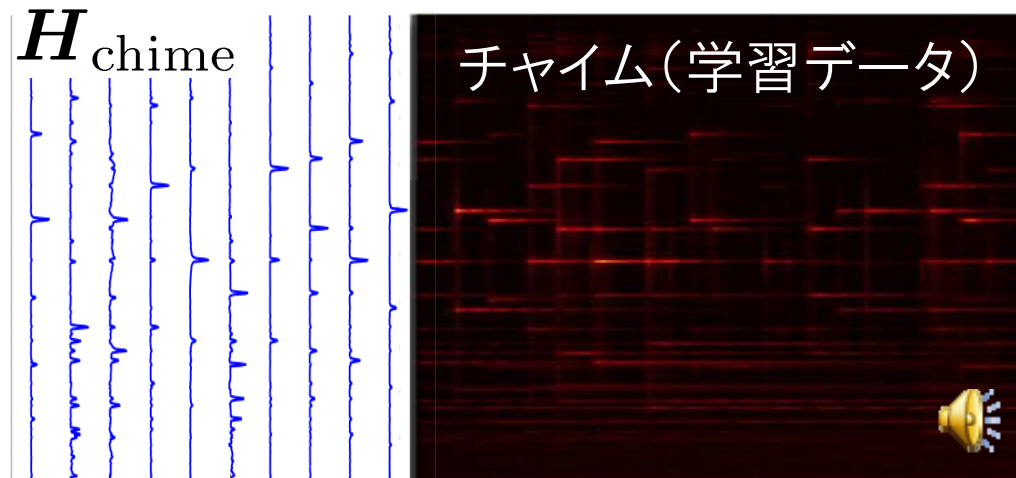
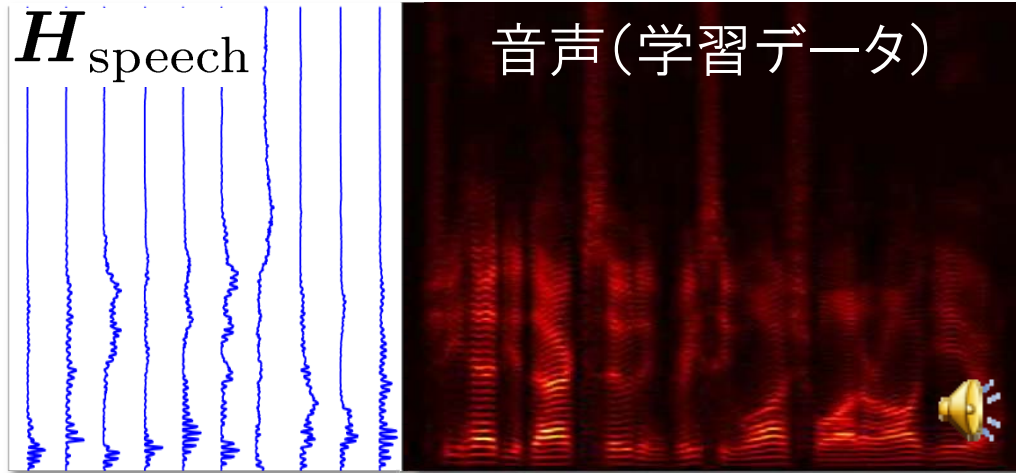
- 自動採譜 [P. Smaragdis et al., 2003]

J.S. Bach: Fuge #16 in G minor 📢



何に使えるのか？(2/3)

- 教師ありモノラル音源分離 [P. Smaragdis et al., 2007]



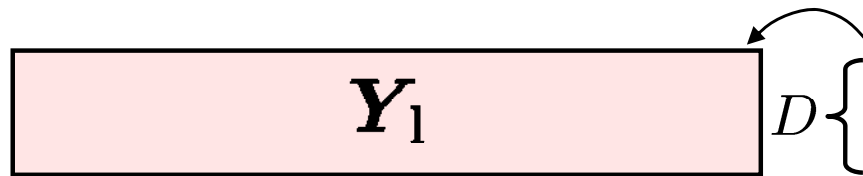
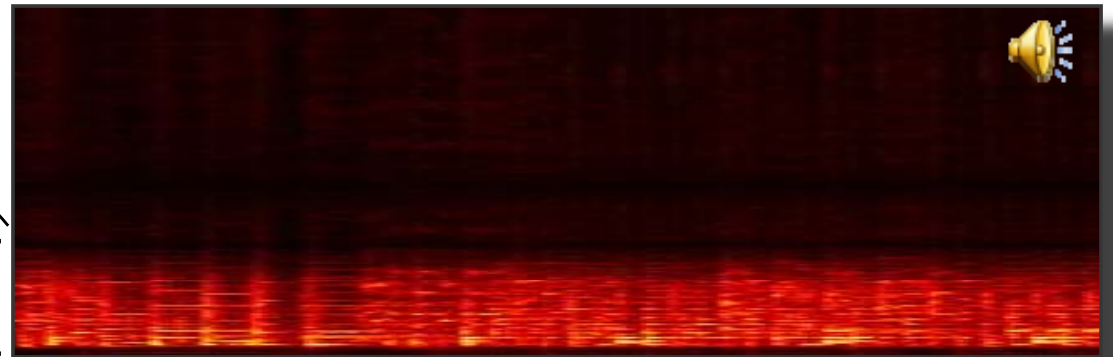
$$Y \simeq \underbrace{\begin{bmatrix} H_{\text{speech}} & H_{\text{chime}} \end{bmatrix}}_{\text{固定}} \begin{bmatrix} U_{\text{speech}} \\ U_{\text{chime}} \end{bmatrix}$$

何に使えるのか？(3/3)

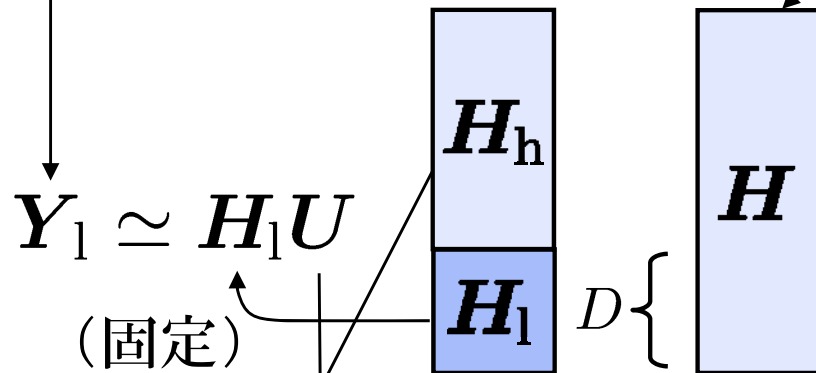
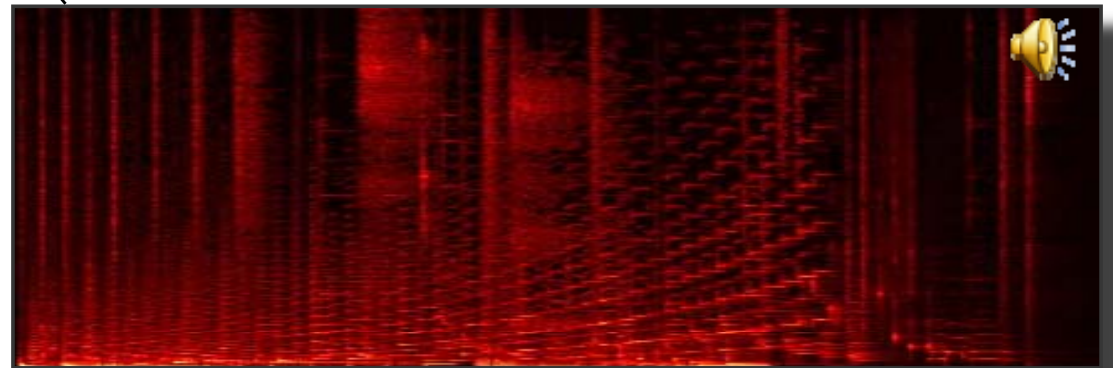
●音の「超解像」

[P. Smaragdis & B. Raj, 2007]

低サンプリングレートの信号



高サンプリングレート信号の学習データ

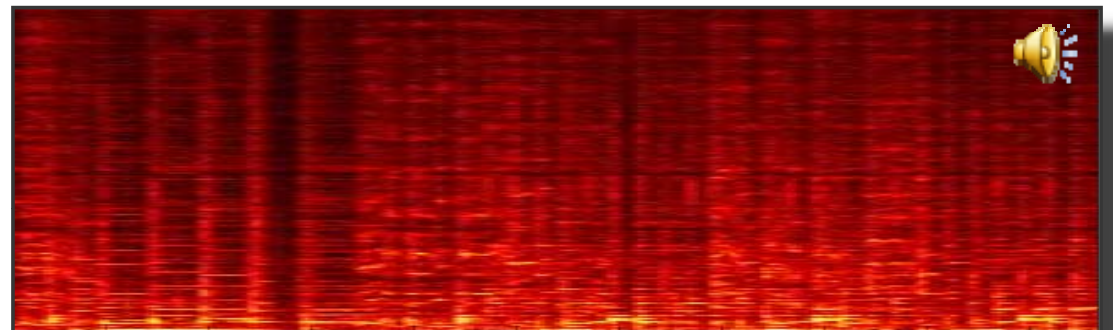


$$Y_1 \simeq H_1 U$$

(固定)

$$H_h U = Y_h$$

高周波帯域が復元された信号



NMFの基本問題

- T 個の観測データ(非負値ベクトル) $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$
- I 個の非負値基底ベクトル $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_I$ の非負結合でどの観測データも良く表現できる基底セットを求めたい

$$\mathbf{y}_t \simeq \sum_{i=1}^I \mathbf{h}_i U_{i,t}, \quad U_{i,t} \geq 0 \quad (t = 1, \dots, T)$$

→ $I \leq \Omega$ のとき, 各基底ベクトルはいくつかの観測データで共起するパターン(パーツと呼ぶ)を表現するよう誘導される

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Y} := (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T) \\ \mathbf{H} := (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_I) \\ \mathbf{U} := (U_{i,t})_{I \times T} \end{array} \right\} \mathbf{Y} \simeq \mathbf{H}\mathbf{U} \quad H_{\omega,i} \geq 0, U_{i,t} \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & D(\mathbf{Y}, \mathbf{H}\mathbf{U}) \\ \text{subject to} & H_{\omega,i} \geq 0, U_{i,t} \geq 0 \end{array}$$

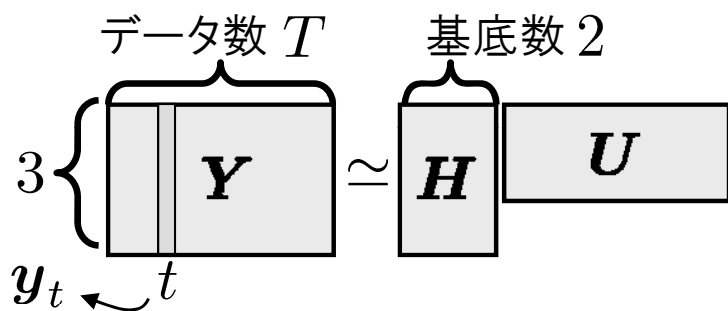
- 想定する状況
 - データは非負値
 - 高々 I 種類のパーツだけですべての観測データは構成されている
 - パーツの和で観測データをモデル化

どんな性質があるのか？

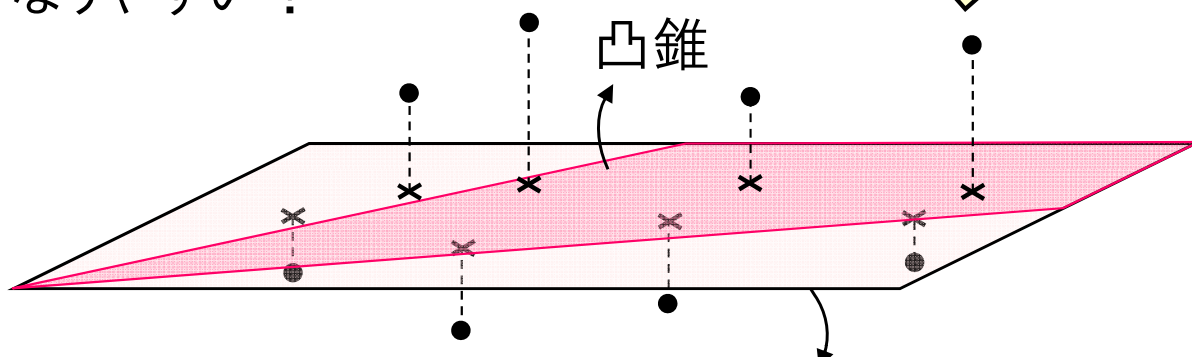
- Frobeniusノルム規準のNMF

$$\text{minimize } \|Y - HU\|_F^2 = \sum_t \left\| y_t - \sum_i h_i U_{i,t} \right\|_2^2$$

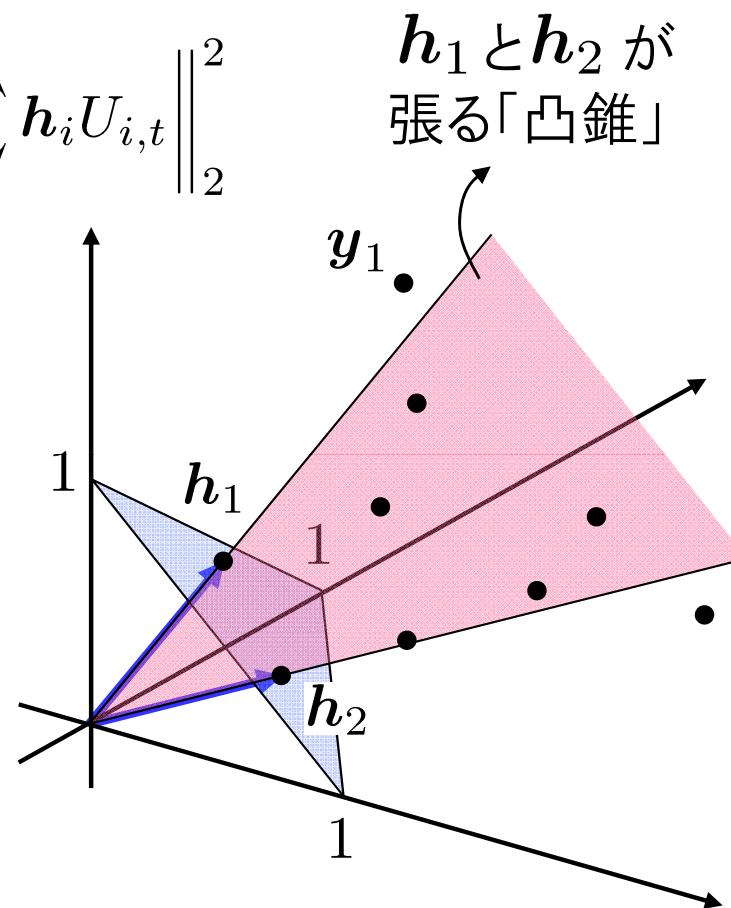
$$\text{subject to } H_{\omega,i} \geq 0, U_{i,t} \geq 0$$



斜交基底だから係数はスパースになりやすい？



h_1 と h_2 が張る部分空間



h_1 と h_2 のなす角を大きくした方がお得！

陽に制約を入れていないのに基底が直交化される傾向に？

どうやって求めるのか

- NMFにおける代表的な最適化規準
 - Frobeniusノルム
 - lダイバージェンス(一般化KLダイバージェンス)
- 押さえておくべき基本原理
 - 補助関数法
 - 凸不等式(Jensenの不等式)

NMFにおける代表的な最適化規準

- Frobeniusノルム規準

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \|Y - HU\|_F^2 = \sum_{\omega,t} \left| Y_{\omega,t} - \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right|^2 \\ \text{subject to} \quad & H_{\omega,i} \geq 0, U_{i,t} \geq 0 \end{aligned}$$

なんとかしたい部分

- Iダイバージェンス(一般化KLダイバージェンス)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{\omega,t} \left(Y_{\omega,t} \log \frac{Y_{\omega,t}}{\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t}} - Y_{\omega,t} + \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right) \\ \text{subject to} \quad & H_{\omega,i} \geq 0, U_{i,t} \geq 0 \end{aligned}$$

なんとかしたい部分

いずれも $Y = HU$ のとき 0 になる

押さえておくべき基本原理(1/2)

● 補助関数法

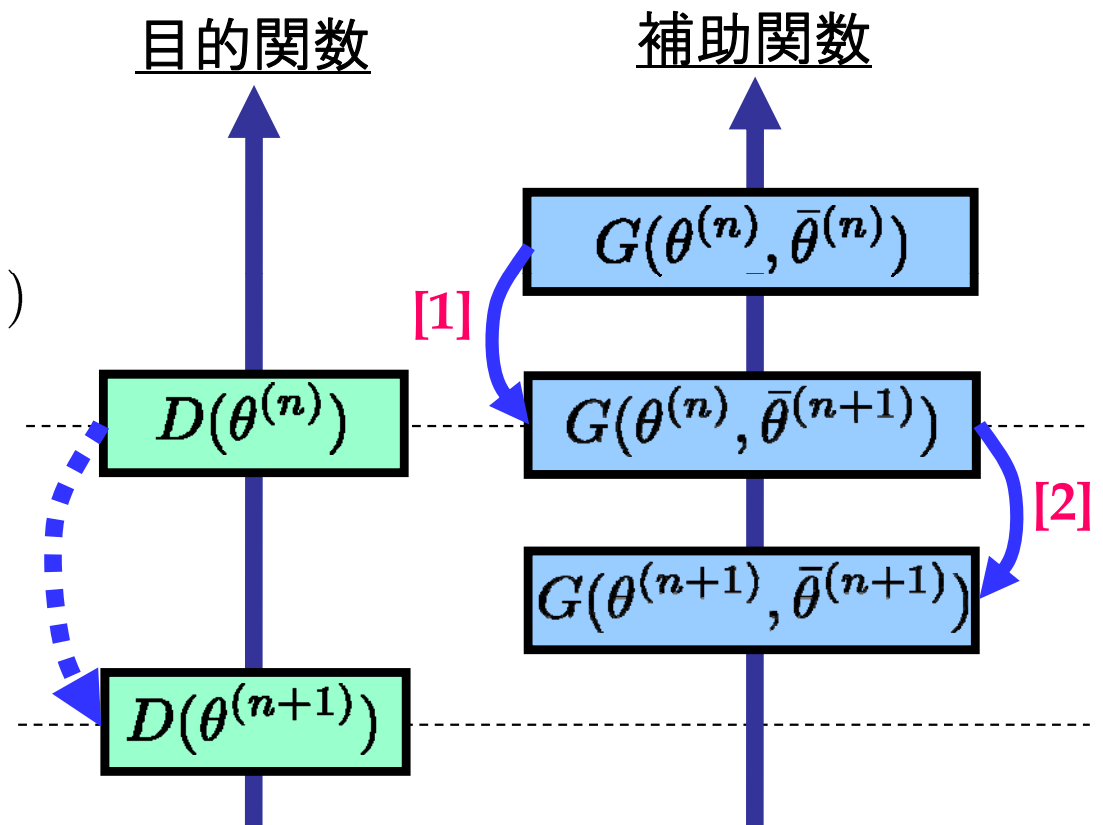
- $D(\theta) = \min_{\bar{\theta}} G(\theta, \bar{\theta})$ を満たす $G(\theta, \bar{\theta})$ を補助関数と定義
- 反復アルゴリズム

$$[1] \bar{\theta}^{(n+1)} = \operatorname{argmin}_{\bar{\theta}} G(\theta^{(n)}, \bar{\theta})$$

$$[2] \theta^{(n+1)} = \operatorname{argmin}_{\theta} G(\theta, \bar{\theta}^{(n+1)})$$

- 収束性

$$\begin{aligned} D(\theta^{(n)}) &= G(\theta^{(n)}, \bar{\theta}^{(n+1)}) \\ &\geq G(\theta^{(n+1)}, \bar{\theta}^{(n+1)}) \\ &\geq D(\theta^{(n+1)}) \end{aligned}$$



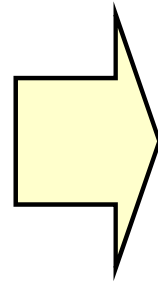
目的関数を直接最小化するのが難しいなら、
とりあえずその上限関数を作ってみよう！

押さえておくべき基本原理(2/2)

- Jensenの不等式

- $\phi(\cdot)$: 凸関数

- $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$

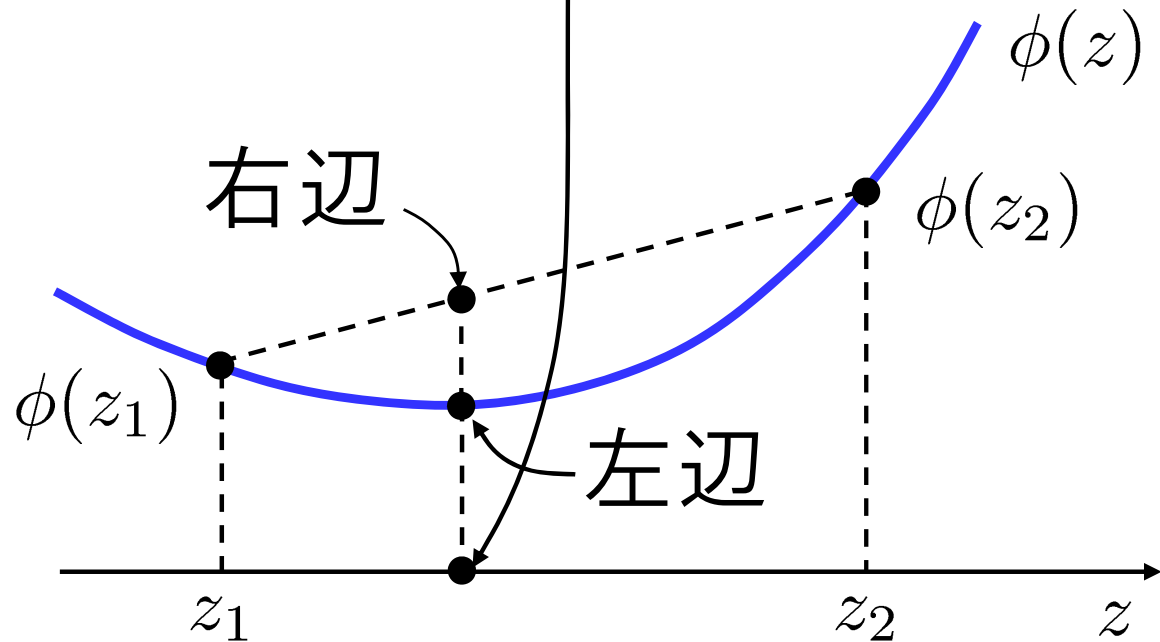


$$\phi\left(\sum_i \lambda_i z_i\right) \leq \sum_i \lambda_i \phi(z_i)$$

例えば、

$\phi(z) = \log z$ の場合:

$$\begin{aligned} & \log\left(\sum_i \lambda_i z_i\right) \\ & \leq \sum_i \lambda_i \log z_i \end{aligned}$$



Frobeniusノルム規準のNMFアルゴリズム

- 目的関数

$$\begin{aligned}\|Y - HU\|_F^2 &= \sum_{\omega,t} \left| Y_{\omega,t} - \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right|^2 \\ &= \sum_{\omega,t} \left(|Y_{\omega,t}|^2 - 2Y_{\omega,t} \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} + \underbrace{\left| \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right|^2}_{\text{Jensen's inequality}} \right)\end{aligned}$$

- 下線部に対してJensenの不等式を立ててみる

$$\begin{aligned}\left(\sum_i z_i \right)^2 &= \left(\sum_i \lambda_i \frac{z_i}{\lambda_i} \right)^2 \leq \sum_i \lambda_i \left(\frac{z_i}{\lambda_i} \right)^2 = \sum_i \frac{z_i^2}{\lambda_i} \\ &\implies \left| \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right|^2 \leq \sum_i \frac{H_{\omega,i}^2 U_{i,t}^2}{\lambda_{i,\omega,t}}\end{aligned}$$

- 補助関数が完成 $H_{\omega,i}$ または $U_{i,t}$ ごとの二次関数の和になっている

$$\|Y - HU\|_F^2 \leq \sum_{\omega,t} \left(|Y_{\omega,t}|^2 - 2Y_{\omega,t} \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} + \sum_i \frac{H_{\omega,i}^2 U_{i,t}^2}{\lambda_{i,\omega,t}} \right)$$

Frobeniusノルム規準のNMFアルゴリズム

- 補助関数が完成したらあとはステップ1とステップ2を導出すればOK!

$$G := \sum_{\omega,t} \left(|Y_{\omega,t}|^2 - 2Y_{\omega,t} \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} + \sum_i \frac{H_{\omega,i}^2 U_{i,t}^2}{\lambda_{i,\omega,t}} \right)$$

[1] $\lambda_{i,\omega,t} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\lambda_{i,\omega,t}} G = \frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\sum_{i'} H_{\omega,i'} U_{i',t}}$ 代入

[2] $H_{\omega,i} \leftarrow \operatorname{argmin}_{H_{\omega,i}} G = \frac{\sum_t Y_{\omega,t} U_{i,t}}{\sum_t \frac{U_{i,t}^2}{\lambda_{i,\omega,t}}}$

$$H_{\omega,i} \leftarrow H_{\omega,i} \frac{\sum_t Y_{\omega,t} U_{i,t}}{\sum_t U_{i,t} \sum_{i'} H_{\omega,i'} U_{i',t}}$$

$$U_{i,t} \leftarrow \operatorname{argmin}_{U_{i,t}} G = \frac{\sum_{\omega} Y_{\omega,t} H_{\omega,i}}{\sum_{\omega} \frac{H_{\omega,i}^2}{\lambda_{i,\omega,t}}}$$

$$U_{i,t} \leftarrow U_{i,t} \frac{\sum_{\omega} Y_{\omega,t} H_{\omega,i}}{\sum_{\omega} H_{\omega,i} \sum_{i'} H_{\omega,i'} U_{i',t}}$$

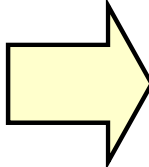
Iダイバージェンス規準のNMFアルゴリズム

- 目的関数

$$\begin{aligned} D &:= \sum_{\omega,t} \left(Y_{\omega,t} \log \frac{Y_{\omega,t}}{\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t}} - Y_{\omega,t} + \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right) \\ &= \sum_{\omega,t} \left(Y_{\omega,t} \log Y_{\omega,t} - Y_{\omega,t} \log \underbrace{\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t}} - Y_{\omega,t} + \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right) \end{aligned}$$

- 下線部に対してJensenの不等式を立ててみる

$$\log \left(\sum_i z_i \right) = \log \left(\sum_i \lambda_i \frac{z_i}{\lambda_i} \right) \leq \sum_i \lambda_i \log \left(\frac{z_i}{\lambda_i} \right)$$


$$\log \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \leq \sum_i \lambda_{i,\omega,t} \log \frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\lambda_{i,\omega,t}}$$

- 補助関数が完成

$$D \leq \sum_{\omega,t} \left(Y_{\omega,t} \log Y_{\omega,t} - Y_{\omega,t} \sum_i \lambda_{i,\omega,t} \log \frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\lambda_{i,\omega,t}} - Y_{\omega,t} + \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right)$$

Iダイバージェンス規準のNMFアルゴリズム

- 補助関数が完成したらあとはステップ1とステップ2を導出すればOK!

$$G := \sum_{\omega,t} \left(Y_{\omega,t} \log Y_{\omega,t} - Y_{\omega,t} \sum_i \lambda_{i,\omega,t} \log \frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\lambda_{i,\omega,t}} - Y_{\omega,t} + \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right)$$

$$[1] \lambda_{i,\omega,t} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\lambda_{i,\omega,t}} G = \frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\sum_{i'} H_{\omega,i'} U_{i',t}} \quad \text{代入}$$

$$[2] H_{\omega,i} \leftarrow \operatorname{argmin}_{H_{\omega,i}} G = \frac{\sum_t Y_{\omega,t} \lambda_{i,\omega,t}}{\sum_t U_{i,t}}$$

$$H_{\omega,i} \leftarrow H_{\omega,i} \frac{\sum_t \frac{Y_{\omega,t} U_{i,t}}{\sum_{i'} H_{\omega,i'} U_{i',t}}}{\sum_t U_{i,t}}$$

$$U_{i,t} \leftarrow \operatorname{argmin}_{U_{i,t}} G = \frac{\sum_{\omega} Y_{\omega,t} \lambda_{i,\omega,t}}{\sum_{\omega} H_{\omega,i}}$$

$$U_{i,t} \leftarrow U_{i,t} \frac{\sum_{\omega} \frac{Y_{\omega,t} H_{\omega,i}}{\sum_{i'} H_{\omega,i'} U_{i',t}}}{\sum_{\omega} H_{\omega,i}}$$

統計モデルとしての解釈

- NMFは以下を仮定した最尤推定問題と等価

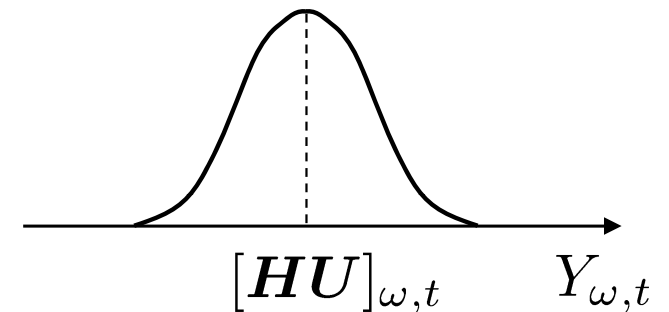
– Frobeniusノルム規準

$$Y_{\omega,t} \sim \mathcal{N}([HU]_{\omega,t}, \sigma^2)$$

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{H}, \mathbf{U}) = \prod_{\omega,t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_{\omega,t} - [HU]_{\omega,t})^2}$$

$$\rightarrow -\log P(\mathbf{Y}|\mathbf{H}\mathbf{U}) \stackrel{c}{=} \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\omega,t} (Y_{\omega,t} - [HU]_{\omega,t})^2$$

正規分布



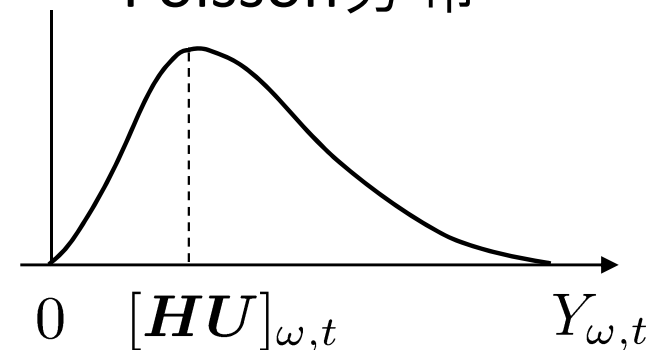
– 1ダイバージェンス規準

$$Y_{\omega,t} \sim \text{Pois}([HU]_{\omega,t})$$

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{H}, \mathbf{U}) = \prod_{\omega,t} \frac{[HU]_{\omega,t}^{Y_{\omega,t}} e^{-[HU]_{\omega,t}}}{Y_{\omega,t}!}$$

$$\rightarrow -\log P(\mathbf{Y}|\mathbf{H}\mathbf{U}) \stackrel{c}{=} \sum_{\omega,t} (-Y_{\omega,t} \log [HU]_{\omega,t} + [HU]_{\omega,t})$$

Poisson分布



NMFアルゴリズムの一般化

- Bregmanダイバージェンス [L.M. Bregman, 1967]

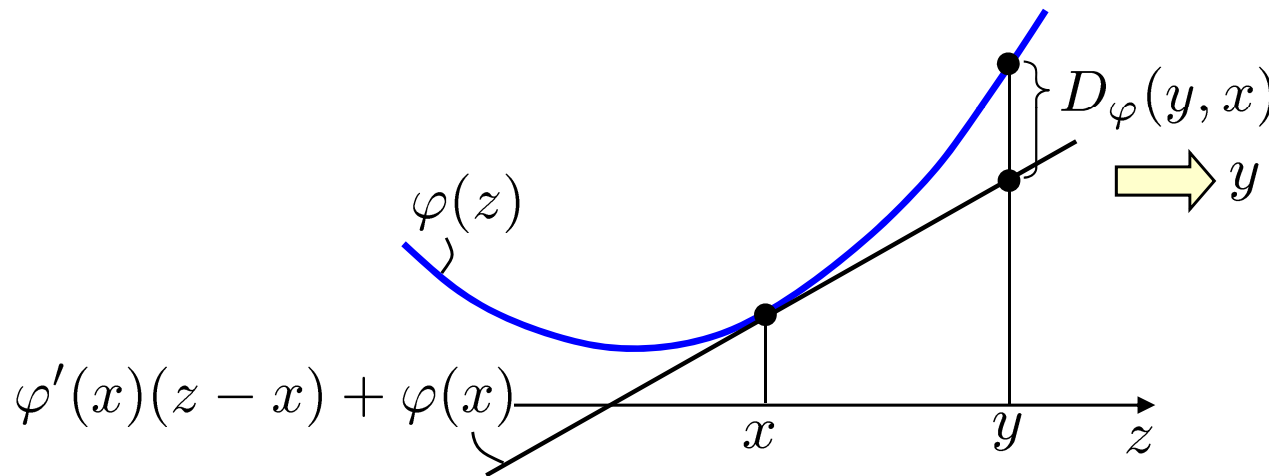
$$D_\varphi(y, x) := \varphi(y) - \varphi(x) - \varphi'(x)(y - x)$$

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は任意の微分可能な凸関数

→ 指数分布族と対応

[A. Banerjee et al., 2005]

$D_\varphi(x, y)$ の最小化は最尤推定問題として解釈可能



⇒ y と x が近いほど小さい

ただし距離の公理は満たさない(対称性が成り立たない)

例) 二乗誤差, 1ダイバージェンス, 板倉齋藤距離

◆ $\varphi(z) = z^2 \longrightarrow D_\varphi(y, x) = y^2 - x^2 - 2x(y - x) = (y - x)^2$

◆ $\varphi(z) = z \log z \longrightarrow D_\varphi(y, x) = y \log y - x \log x - (1 + \log x)(y - x) = y \log \frac{y}{x} - (y - x)$

◆ $\varphi(z) = -\log z \longrightarrow D_\varphi(y, x) = -\log y + \log x + \frac{1}{x}(y - x) = \frac{y}{x} - \log \frac{y}{x} - 1$

Bregmanダイバージェンスと対応する距離尺度

y : 観測値 x : NMF型モデル

$$\operatorname{argmin}_x \begin{cases} D_\varphi(y, x) \\ D_\varphi(x, y) \end{cases}$$

[I.S. Dhillon & S. Sra, 2005]

	$D_\varphi(y, x)$	$D_\varphi(x, y)$
$\varphi(z) = z^2$	二乗誤差 $(y - x)^2$	二乗誤差 $(x - y)^2$
$\varphi(z) = z \log z$	ダイバージェンス $y \log \frac{y}{x} - (y - x)$	双対ダイバージェンス $x \log \frac{x}{y} - (x - y)$
$\varphi(z) = -\log z$	板倉斎藤距離 $\frac{y}{x} - \log \frac{y}{x} - 1$	双対板倉斎藤距離 $\frac{x}{y} - \log \frac{x}{y} - 1$

[H. Kameoka et al., 2006][C. Févotte et al., 2008]

Bregmanダイバージェンスと対応する尤度関数

y : 観測値 x : NMF型モデル

$$\operatorname{argmin}_x \begin{cases} D_\varphi(y, x) \\ D_\varphi(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{argmax}_x P(y|x)$$

	$D_\varphi(y, x)$	$D_\varphi(x, y)$
$\varphi(z) = z^2$	Gauss分布 $y x \sim \mathcal{N}(x, \sigma^2)$	Gauss分布 $y x \sim \mathcal{N}(x, \sigma^2)$
$\varphi(z) = z \log z$	Poisson分布 $y x \sim \text{Pois}(x)$?分布
$\varphi(z) = -\log z$	指数分布 $y x \sim \text{Exp}(1/x)$	逆Gamma分布 $y x \sim \text{InvGamma}(0, x)$

NMFアルゴリズムの(できるだけ)一般化

- β ダイバージェンス [S. Eguchi & Y. Kano, 2001]

$$D_{\beta}(y, x) := \frac{y^{\beta}}{\beta(\beta - 1)} + \frac{x^{\beta}}{\beta} - \frac{yx^{\beta-1}}{\beta - 1}$$

Bregmanダイバージェンスにおいて

$$\varphi(z) = \frac{1}{(\beta - 1)\beta} (z^{\beta} - \beta z + \beta - 1) \text{ と置いたもの}$$

例) 二乗誤差, β ダイバージェンス, 板倉齋藤距離

$$\diamond \beta = 2 \quad D_{\beta}(y, x) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - yx = \frac{1}{2}(y - x)^2$$

$$\diamond \beta \rightarrow 1 \quad D_{\beta}(y, x) \rightarrow y \log \frac{y}{x} + x \quad \because \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{yx^{\beta-1}}{\beta - 1} = \lim_{\beta \rightarrow 1} yx^{\beta-1} \log x = y \log x$$

$$\diamond \beta \rightarrow 0 \quad D_{\beta}(y, x) \rightarrow \frac{y}{x} - \log \frac{y}{x} \quad \because \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{x^{\beta}}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} x^{\beta} \log x = \log x$$

NMFアルゴリズム： β ダイバージェンス最小化

[M. Nakano et al., 2010]

$$\text{minimize} \quad \sum_{\omega,t} D_{\beta} \left(Y_{\omega,t}, \sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right)$$

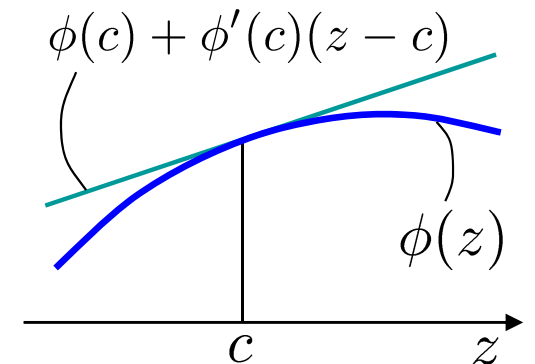
$$\text{subject to} \quad H_{\omega,i} \geq 0, U_{i,t} \geq 0 \quad (1 \leq \omega \leq \Omega, 1 \leq t \leq T)$$

- 目的関数 $\theta := \{H, U\}$

$$D(\theta) = \sum_{\omega,t} \left[\frac{Y_{\omega,t}^{\beta}}{\beta(\beta-1)} + \frac{1}{\beta} \underbrace{\left(\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right)^{\beta}}_{\text{凸/凹}} - \frac{Y_{\omega,t}}{\beta-1} \underbrace{\left(\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right)^{\beta-1}}_{\text{凸/凹}} \right]$$

- 補助関数の設計方針

$$\begin{aligned} - \text{凸不等式} \quad & \phi \left(\sum_i \lambda_i z_i \right) \leq \sum_i \lambda_i \phi(z_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi : \text{凸関数} \\ \sum_i \lambda_i = 1 \end{array} \right. \\ - \text{接線不等式} \quad & \phi(z) \leq \phi(c) + \phi'(c)(z-c) \quad \phi : \text{凹関数} \end{aligned}$$



➡ 凸関数項の上限を凸不等式，凹関数項の上限を接線不等式を使って設計し，補助関数を構成 [H. Kameoka et al., 2006]

NMFアルゴリズム： β ダイバージェンス最小化

[M. Nakano et al., 2010]

- 補助関数

$$\frac{1}{\beta} \left(\underbrace{\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t}}_{\geq 0} \right) \leq \begin{cases} \text{⏏} \left\{ \frac{1}{\beta} \sum_i \lambda_{i,\omega,t} \left(\frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\lambda_{i,\omega,t}} \right)^\beta \right. & (\beta \geq 1) \\ \text{⏏} \left\{ \frac{1}{\beta} c_{\omega,t}^\beta + c_{\omega,t}^{\beta-1} \left(\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} - c_{\omega,t} \right) \right. & (\beta \leq 1, \beta \neq 0) \end{cases}$$

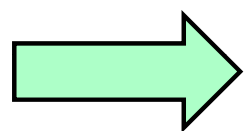
$$-\frac{1}{\beta-1} \left(\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} \right)^{\beta-1} \leq \begin{cases} \text{⏏} \left\{ -\frac{1}{\beta-1} \sum_i \lambda_{i,\omega,t} \left(\frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\lambda_{i,\omega,t}} \right)^{\beta-1} \right. & (\beta \leq 2, \beta \neq 1) \\ \text{⏏} \left\{ -\frac{1}{\beta-1} c_{\omega,t}^{\beta-1} - c_{\omega,t}^{\beta-2} \left(\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} - c_{\omega,t} \right) \right. & (\beta \geq 2) \end{cases}$$

(例) $0 < \beta < 1$ のケース:

ただし, $\sum_i \lambda_{i,\omega,t} = 1$

$$G(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{\omega,t} \left[\frac{Y_{\omega,t}^\beta}{\beta(\beta-1)} + \frac{1}{\beta} c_{\omega,t}^\beta + c_{\omega,t}^{\beta-1} \left(\sum_i H_{\omega,i} U_{i,t} - c_{\omega,t} \right) - \frac{Y_{\omega,t}}{\beta-1} \sum_i \lambda_{i,\omega,t} \left(\frac{H_{\omega,i} U_{i,t}}{\lambda_{i,\omega,t}} \right)^{\beta-1} \right]$$

$\{c_{\omega,t}\}, \{\lambda_{i,\omega,t}\}$
 subject to $\sum_i \lambda_{i,\omega,t} = 1$



$$D(\theta) = \min_{\bar{\theta}} G(\theta, \bar{\theta}) \quad \begin{cases} \lambda_{i,\omega,t}^{(n+1)} = \operatorname{argmin}_{\lambda_{i,\omega,t}} G(\theta^{(n)}, \bar{\theta}) = \frac{H_{\omega,i}^{(n)}}{\sum_{i'} H_{\omega,i'}^{(n)} U_{i',t}^{(n)}} \\ c_{\omega,t}^{(n+1)} = \operatorname{argmin}_{c_{\omega,t}} G(\theta^{(n)}, \bar{\theta}) = \sum_{i'} H_{\omega,i'}^{(n)} U_{i',t}^{(n)} \end{cases}$$

NMFアルゴリズム： β ダイバージェンス最小化

[M. Nakano et al., 2010]

- 補助関数 (例) $0 < \beta < 1$ のケース:

$$G(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{\omega, t} \left[\frac{Y_{\omega, t}^\beta}{\beta(\beta - 1)} + \frac{1}{\beta} c_{\omega, t}^\beta + c_{\omega, t}^{\beta-1} \left(\sum_i H_{\omega, i} U_{i, t} - c_{\omega, t} \right) - \frac{Y_{\omega, t}}{\beta - 1} \sum_i \lambda_{i, \omega, t} \left(\frac{H_{\omega, i} U_{i, t}}{\lambda_{i, \omega, t}} \right)^{\beta-1} \right]$$

$$\begin{aligned} H_{\omega, i}^{(n+1)} &= \underset{H_{\omega, i}}{\operatorname{argmin}} G(\theta, \bar{\theta}^{(n+1)}) \\ U_{i, t}^{(n+1)} &= \underset{U_{i, t}}{\operatorname{argmin}} G(\theta, \bar{\theta}^{(n+1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G(\theta, \bar{\theta})}{\partial H_{\omega, i}} = \sum_t \left[c_{\omega, t}^{(n+1)\beta-1} U_{i, t}^{(n)} - \frac{Y_{\omega, t} U_{i, t}^{(n)\beta-1}}{\lambda_{i, \omega, t}^{(n+1)\beta-2}} H_{\omega, i}^{\beta-2} \right] = 0 \\ \frac{\partial G(\theta, \bar{\theta})}{\partial U_{i, t}} = \sum_\omega \left[c_{\omega, t}^{(n+1)\beta-1} H_{\omega, i}^{(n)} - \frac{Y_{\omega, t} H_{\omega, i}^{(n)\beta-1}}{\lambda_{i, \omega, t}^{(n+1)\beta-2}} U_{i, t}^{\beta-2} \right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H_{\omega, i}^{(n+1)} &= \left(\frac{\sum_t c_{\omega, t}^{(n+1)\beta-1} U_{i, t}^{(n)}}{\sum_t Y_{\omega, t} U_{i, t}^{(n)\beta-1} / \lambda_{i, \omega, t}^{(n+1)\beta-2}} \right)^{\beta-2} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} H_{\omega, i}^{(n+1)} = \frac{\sum_t Y_{\omega, t} \lambda_{i, \omega, t}^{(n+1)}}{\sum_t U_{i, t}^{(n)}} \\ U_{i, t}^{(n+1)} &= \left(\frac{\sum_\omega c_{\omega, t}^{(n+1)\beta-1} H_{\omega, i}^{(n)}}{\sum_\omega Y_{\omega, t} H_{\omega, i}^{(n)\beta-1} / \lambda_{i, \omega, t}^{(n+1)\beta-2}} \right)^{\beta-2} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} U_{i, t}^{(n+1)} = \frac{\sum_\omega Y_{\omega, t} \lambda_{i, \omega, t}^{(n+1)}}{\sum_\omega H_{\omega, i}^{(n)}} \end{aligned}$$

NMF と pLSA [T. Hofmann, 1999] との関係

(probabilistic Latent Semantic Analysis)

- 各行列要素を確率値だと考えてみよう

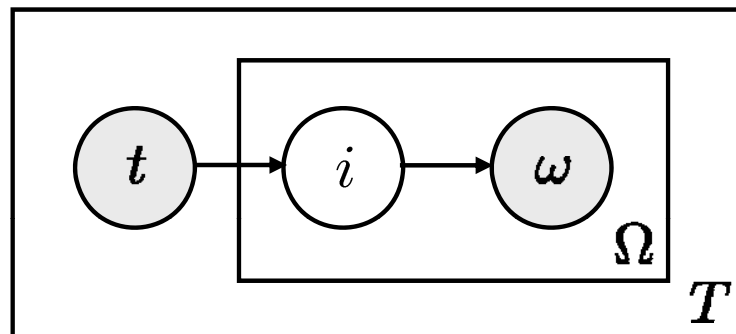
$$\mathbf{X} = \mathbf{H} \mathbf{U}$$

$P(\omega|t)$ 文書 t に単語 ω が現われる確率

$P(\omega|i)$ トピック i のとき単語 ω が生成される確率

$P(i|t)$ 文書 t がトピック i のものである確率

$$\rightarrow P(\omega|t) = \sum_i P(\omega|i)P(i|t)$$



NMF と pLSA [T. Hofmann, 1999] との関係

(probabilistic Latent Semantic Analysis)

- pLSAでは各文書中の単語数 $N_{\omega,t}$ から $P(\omega|i), P(i|t)$ を推定

$$\log P(\omega|t)^{N_{\omega,t}} \rightarrow \text{maximize}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{\omega,t} N_{\omega,t} \log P(\omega|t) \\ &\text{subject to} && P(\omega|i) \geq 0, P(i|t) \geq 0 \\ &&& \sum_{\omega} P(\omega|i) = 1, \sum_i P(i|t) = 1 \end{aligned}$$

$N_{\omega,t}$ と $P(\omega|t)$ の
|ダイバージェンス
最小化と同じ意味

NMF と Sparse coding [B.A. Olshausen, 1996] との関係

- T 個の観測データ(実数値ベクトル) $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$
- すべての観測データが I 個の実数値基底ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_I$ の”スパース”な線形結合で表される基底セットを求めたい

–exactなreconstruction

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && S(\mathbf{U}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{U} \end{aligned}$$

NMFでは副次効果的にスパースになっていたのに対し, sparse codingではスパース性コストにより強制的にスパース化

–approximation

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{U}\|_F^2 + \lambda S(\mathbf{U}) \\ &\text{subject to} && \|\mathbf{U}\|_F^2 = 1 \end{aligned}$$

勾配法等

- スパース性コスト [B.A. Olshausen, 1996][G. Harpur, 2000]

– L_p ノルム $S(\mathbf{U}) = \sum_{i,t} |U_{i,t}|^p$

$$S(\mathbf{U}) = \sum_{i,t} \log(1 + U_{i,t}^2) \quad \text{尖度} \quad S(\mathbf{U}) = \sum_i \left(\frac{\langle (U_{i,t} - \mu_i)^4 \rangle_t}{\sigma_t^2} - 3 \right)$$

NMFによる振幅スペクトログラムの分解表現の問題点

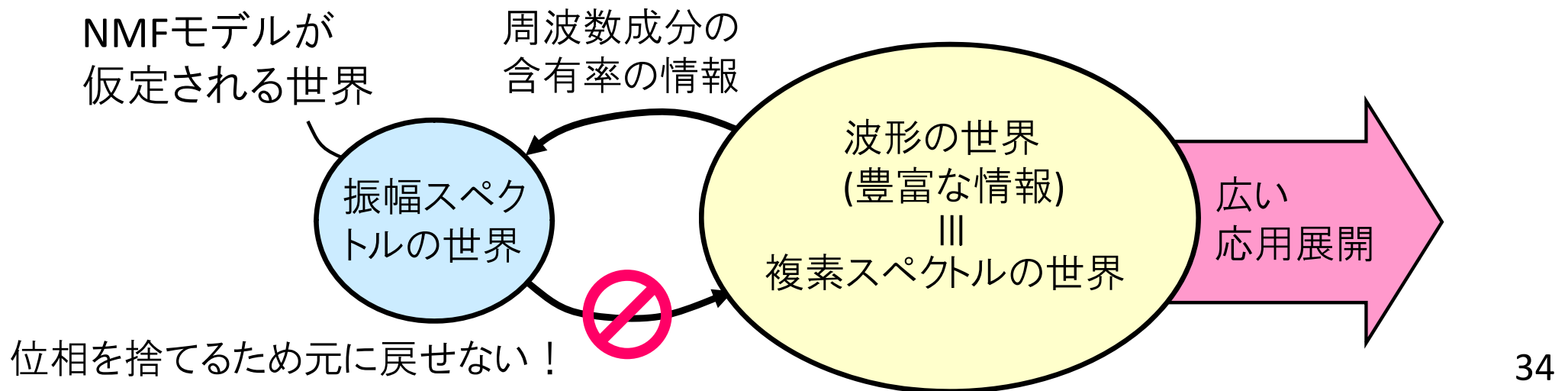
観測振幅スペクトルを振幅スペクトルパーツの和でモデル化

☹️ 振幅スペクトルの加法性を仮定した不正確なモデル

- 振幅スペクトルは本当は非加法的（加法的なのは波形！）
- ➔ モデル自体に誤差を含んでいる

☹️ 位相情報の放棄

- 推定したモデルが波形に対応しない
- 波形領域で実現される多くの信号処理法と組み合わせられない



振幅スペクトルの非加法性について

◆ 音響信号 $y(u) \in \mathbb{R}$ \longrightarrow $y(u) = \sum_i x^i(u)$ (波形同士は加法的)

↓ 短時間フーリエ変換 (時間周波数分解) \cdots 線形な変換

$Y_{\omega,t} = \int W(u)y(u+t)e^{j\omega u} du \in \mathbb{C} \longrightarrow Y_{\omega,t} = \sum_i X_{\omega,t}^i$ (もちろん加法的)

↓ 絶対値をとる \cdots 非線形な変換

$|Y_{\omega,t}|$: 時刻 t に周波数 ω の成分が
 どれほど含まれているか $\longrightarrow |Y_{\omega,t}| = \left| \sum_i X_{\omega,t}^i \right|$

$\neq \sum_i |X_{\omega,t}^i|$ (振幅スペクトル
 同士は **非加法的**)

$Y \simeq HU$ ($H \succeq 0, U \succeq 0$)
 NMFモデル

$|Y_{\omega,t}| = \sum_i \underbrace{H_{\omega}^i U_t^i}_{\text{振幅スペクトル?}}$

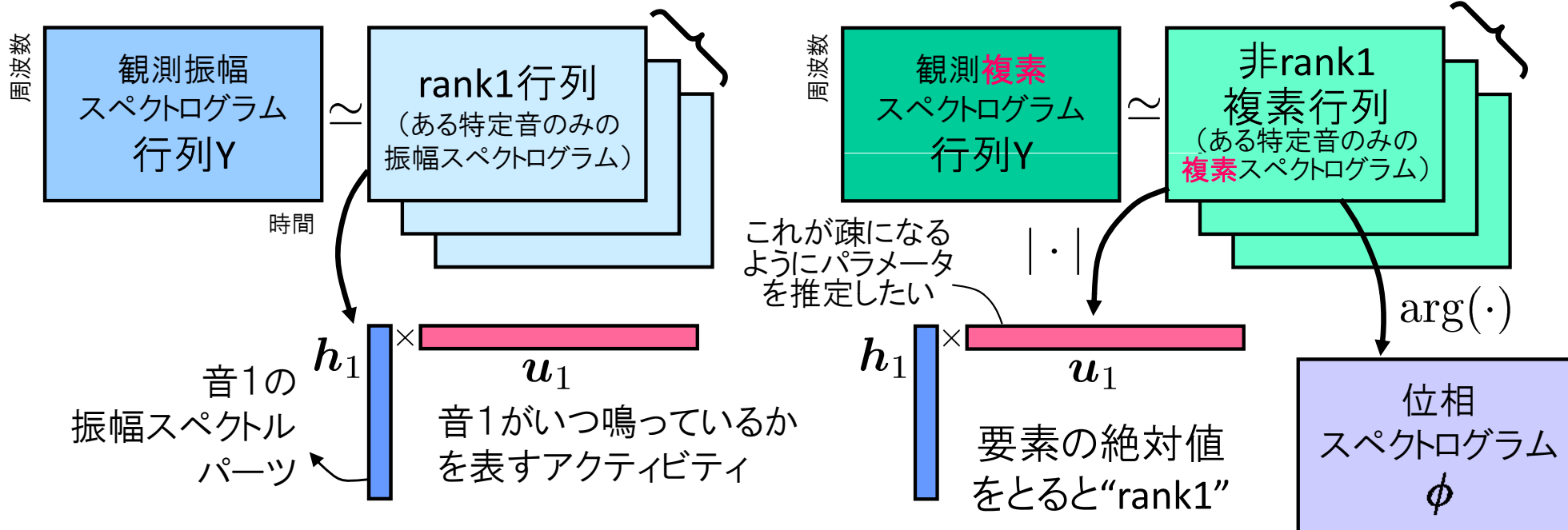
新モデル「複素NMF」の提案

従来のNMFの捉え方

何種類かの音
からなると仮定

複素NMFの考え方

加法性が
成り立つ！



◆複素NMFモデル

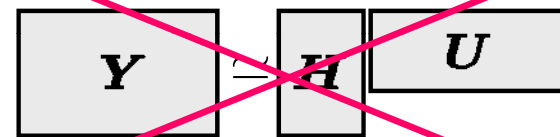
- 複素スペクトログラム $Y_{\omega,t} \in \mathbb{C}$ をモデル化

$$Y_{\omega,t} = \sum_i X_{\omega,t}^i \quad \leftarrow \quad |X_{\omega,t}^i| = H_{\omega}^i U_t^i$$

$$= \sum_i \underline{|X_{\omega,t}^i|} e^{j\phi_{\omega,t}^i} = \sum_i \underline{H_{\omega}^i U_t^i} e^{j\phi_{\omega,t}^i}$$

$$H_{\omega}^i \geq 0, U_t^i \geq 0$$

行列積の形にならない！
(新しいクラスのスパース表現モデル)



複素NMFアルゴリズム

- 定義

- 複素スペクトログラム

$$Y_{\omega,t} \in \mathbb{C}$$

- 振幅スペクトル基底

$$\mathcal{H} \equiv \{H_{\omega}^i\}$$

- 位相スペクトログラム

$$\phi \equiv \{\phi_{\omega,t}^i\}$$

- ゲイン

$$\mathcal{U} \equiv \{U_t^i\}$$

音響信号モデル

$$F_{\omega,t} = \sum_{i=1}^I H_{\omega}^i U_t^i e^{j\phi_{\omega,t}^i}$$

- 最適化問題

$$Y_{\omega,t} = F_{\omega,t} + \epsilon_{\omega,t} \begin{cases} \epsilon_{\omega,t} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2) \\ U_t^i \sim \mathcal{GGD}(0, b, p) \quad (0 < p < 2) \end{cases}$$

一般化正規分布

minimize $f(\mathcal{H}, \mathcal{U}, \phi) := \sum_{\omega,t} |Y_{\omega,t} - F_{\omega,t}|^2 + 2\lambda \sum_{i,t} |U_t^i|^p$

subject to $\sum_{\omega} H_{\omega}^i = 1 \quad (i = 1, \dots, I)$

スパース正則化項

複素NMFアルゴリズム

- 補助関数法

$$f(\mathcal{H}, \mathcal{U}, \phi) = \sum_{\omega, t} |Y_{\omega, t} - F_{\omega, t}|^2 + 2\lambda \sum_{i, t} |U_t^i|^p$$

$$\leq \sum_{\omega, t} \sum_i \frac{|\bar{Y}_{\omega, t}^i - H_{\omega}^i U_t^i e^{j\phi_{\omega, t}^i}|^2}{\beta_{\omega, t}^i} + \lambda \sum_{i, t} (p|\bar{U}_t^i|^{p-2} U_t^i{}^2 + (2-p)|\bar{U}_t^i|^p)$$

$0 < \beta_{\omega, t}^i < 1, \sum_i \beta_{\omega, t}^i = 1$
 を満たす任意の定数

$$\text{subject to } \sum_i \bar{Y}_{\omega, t}^i = Y_{\omega, t} \quad =: g(\mathcal{H}, \mathcal{U}, \phi, \bar{Y}, \bar{U})$$

ℓ 回目の反復計算後のパラメータ値 $\mathcal{H}^{(\ell)} = \{H_{\omega}^{i(\ell)}\}$, $\mathcal{U}^{(\ell)} = \{U_t^{i(\ell)}\}$, $\phi^{(\ell)} = \{\phi_{\omega, t}^{i(\ell)}\}$

Step 1)	$\bar{Y}_{\omega, t}^{i(\ell+1)} \leftarrow H_{\omega}^{i(\ell)} U_t^{i(\ell)} e^{j\phi_{\omega, t}^{i(\ell)}} + \beta_{\omega, t}^i (Y_{\omega, t} - F_{\omega, t}^{(\ell)})$	}	$f(\mathcal{H}^{(\ell)}, \mathcal{U}^{(\ell)}, \phi^{(\ell)})$
	$\bar{U}_t^{i(\ell+1)} \leftarrow U_t^{i(\ell)}$		$= g(\mathcal{H}^{(\ell)}, \mathcal{U}^{(\ell)}, \phi^{(\ell)}, \bar{Y}^{(\ell+1)}, \bar{U}^{(\ell+1)})$
Step 2)	$H_{\omega}^{i(\ell+1)} \leftarrow \frac{\sum_t U_t^{i(\ell)} \text{Re}[\bar{Y}_{\omega, t}^{i(\ell+1)*} e^{j\phi_{\omega, t}^{i(\ell)}}] / \beta_{\omega, t}^i}{\sum_t U_t^{i(\ell)2} / \beta_{\omega, t}^i}$		$\geq g(\mathcal{H}^{(\ell+1)}, \mathcal{U}^{(\ell+1)}, \phi^{(\ell+1)}, \bar{Y}^{(\ell+1)}, \bar{U}^{(\ell+1)})$
	$U_t^{i(\ell+1)} \leftarrow \frac{\sum_t H_{\omega}^{i(\ell)} \text{Re}[\bar{Y}_{\omega, t}^{i(\ell+1)*} e^{j\phi_{\omega, t}^{i(\ell)}}] / \beta_{\omega, t}^i}{\sum_t U_t^{i(\ell)2} / \beta_{\omega, t}^i + \lambda p \bar{U}_t^{i(\ell+1)} ^{p-2}}$		$\geq f(\mathcal{H}^{(\ell+1)}, \mathcal{U}^{(\ell+1)}, \phi^{(\ell+1)})$
	$e^{j\phi_{\omega, t}^{i(\ell+1)}} \leftarrow \bar{Y}_{\omega, t}^{i(\ell+1)} / \bar{Y}_{\omega, t}^{i(\ell+1)} $		f は増加しない!

NMFと等価となる条件

複素NMFはNMFを包含

Step 1) $\bar{Y}_{\omega,t}^i \leftarrow H_{\omega}^i U_t^i e^{j\phi_{\omega,t}^i} + \beta_{\omega,t}^i (Y_{\omega,t} - F_{\omega,t})$

$$\bar{U}_t^i \leftarrow U_t^i$$

Step 2) $H_{\omega}^i \leftarrow \frac{\sum_t U_t^i \operatorname{Re}[\bar{Y}_{\omega,t}^{i*} e^{j\phi_{\omega,t}^i}]}{\sum_t U_t^{i2} / \beta_{\omega,t}^i}$

$$U_t^i \leftarrow \frac{\sum_{\omega} H_{\omega}^i \operatorname{Re}[\bar{Y}_{\omega,t}^{i*} e^{j\phi_{\omega,t}^i}]}{\sum_t U_t^{i2} / \beta_{\omega,t}^i + \lambda p |\bar{U}_t^i|^{p-2}}$$

$$e^{j\phi_{\omega,t}^i} \leftarrow \bar{Y}_{\omega,t}^i / |\bar{Y}_{\omega,t}^i|$$

[条件1]

$\phi_{\omega,t}^i$ を $\arg(Y_{\omega,t})$ に初期設定する

$\phi_{\omega,t}^i = \arg(Y_{\omega,t})$ は Step1, Step2に対して不動点になっている

[条件2]

Step 3) $\beta_{\omega,t}^i \leftarrow \frac{H_{\omega}^i U_t^i}{\sum_k H_{\omega}^k U_t^k}$ を実行

$\beta_{\omega,t}^i : 0 < \beta_{\omega,t}^i < 1, \sum_i \beta_{\omega,t}^i = 1$
を満たす任意の定数

$$H_{\omega}^i \leftarrow H_{\omega}^i \frac{\sum_t U_t^i |Y_{\omega,t}|}{\sum_t U_t^i \sum_k H_{\omega}^k U_t^k}$$

$$U_t^i \leftarrow U_t^i \frac{\sum_{\omega} H_{\omega}^i |Y_{\omega,t}|}{\sum_{\omega} H_{\omega}^i \sum_k H_{\omega}^k U_t^k + \lambda p |U_t^i|^{p-2}}$$

Lee & Seungの二乗誤差規準のNMFアルゴリズム[Lee & Seung, 2000]と等価!

複素NMFによる
モノラル信号分離
デモンストレーション

Complex NMF

by H. Kameoka

サンプリング Hz
フレーム長 ms

トータル時間 s
スペクトルパーツ数
エンベロープパーツ数

表示するスペクトルパーツ

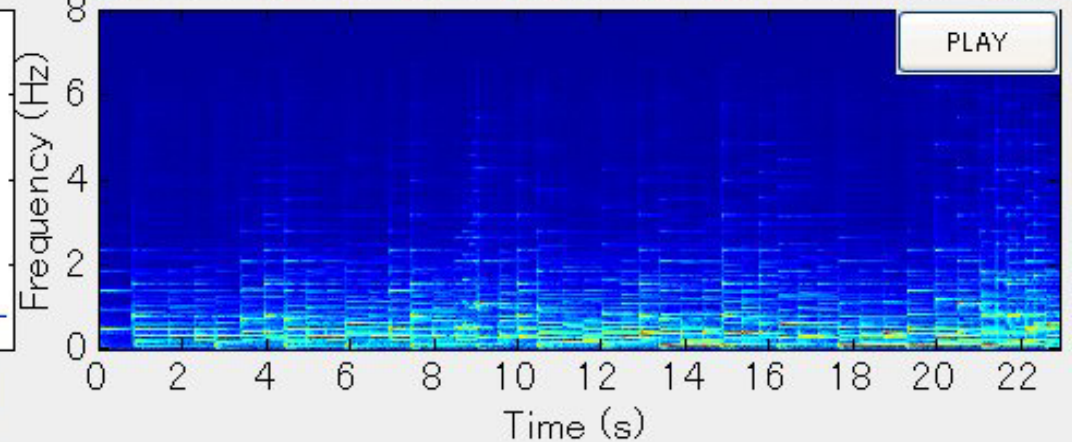
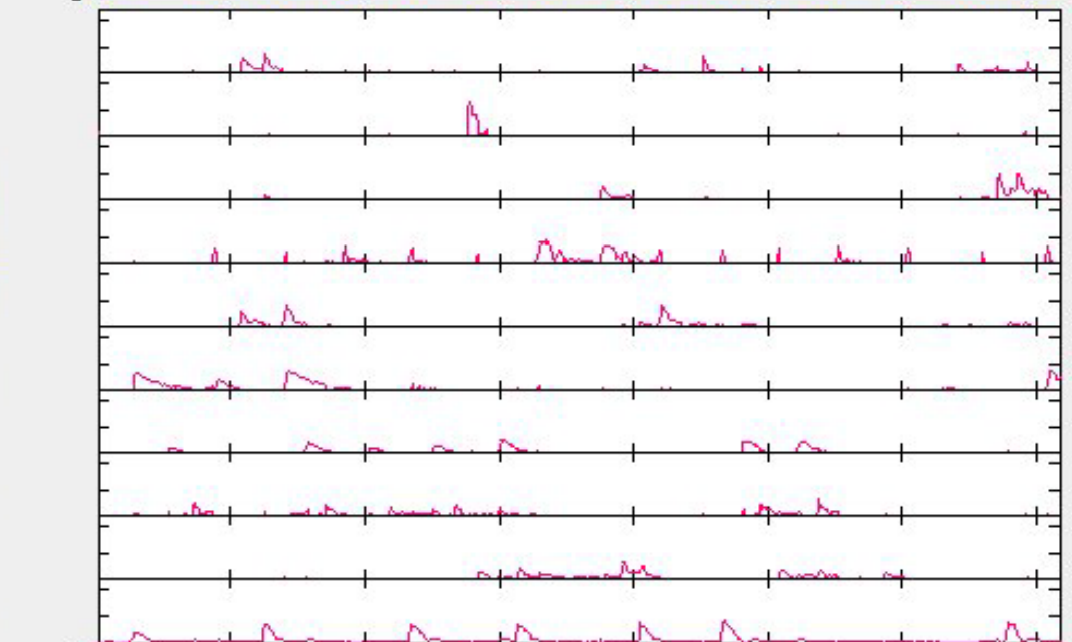
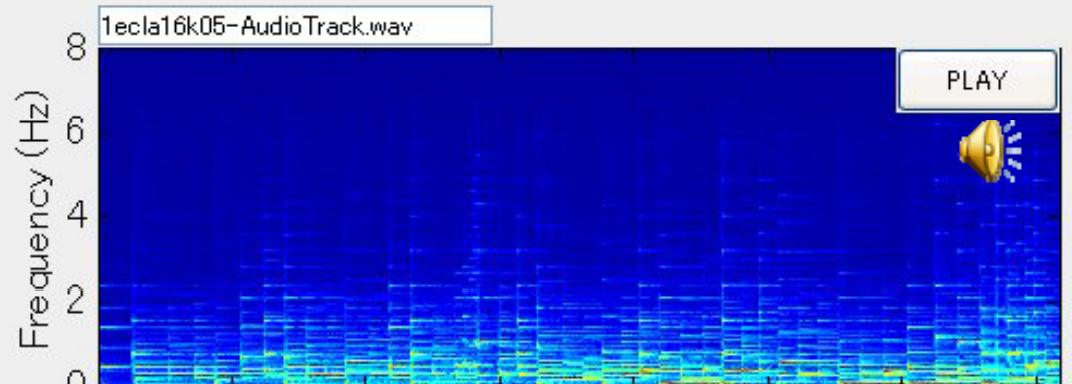
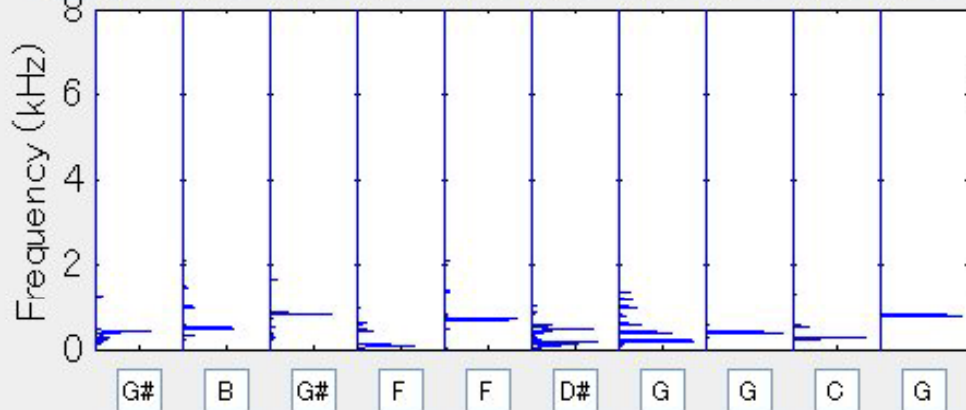
No. 1 - 10

トランスポーズ

<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="m"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="-"/>

ボリュームコントロール

<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>	<input type="text" value="M"/>



Complex NMF

by H. Kameoka

Open サンプリング 16000 Hz フレーム長 64 ms
トータル時間 23 s

Factorize スペクトルパーツ数 30 Save
エンベロープパーツ数 5

表示するスペクトルパーツ

No. 1 - 10

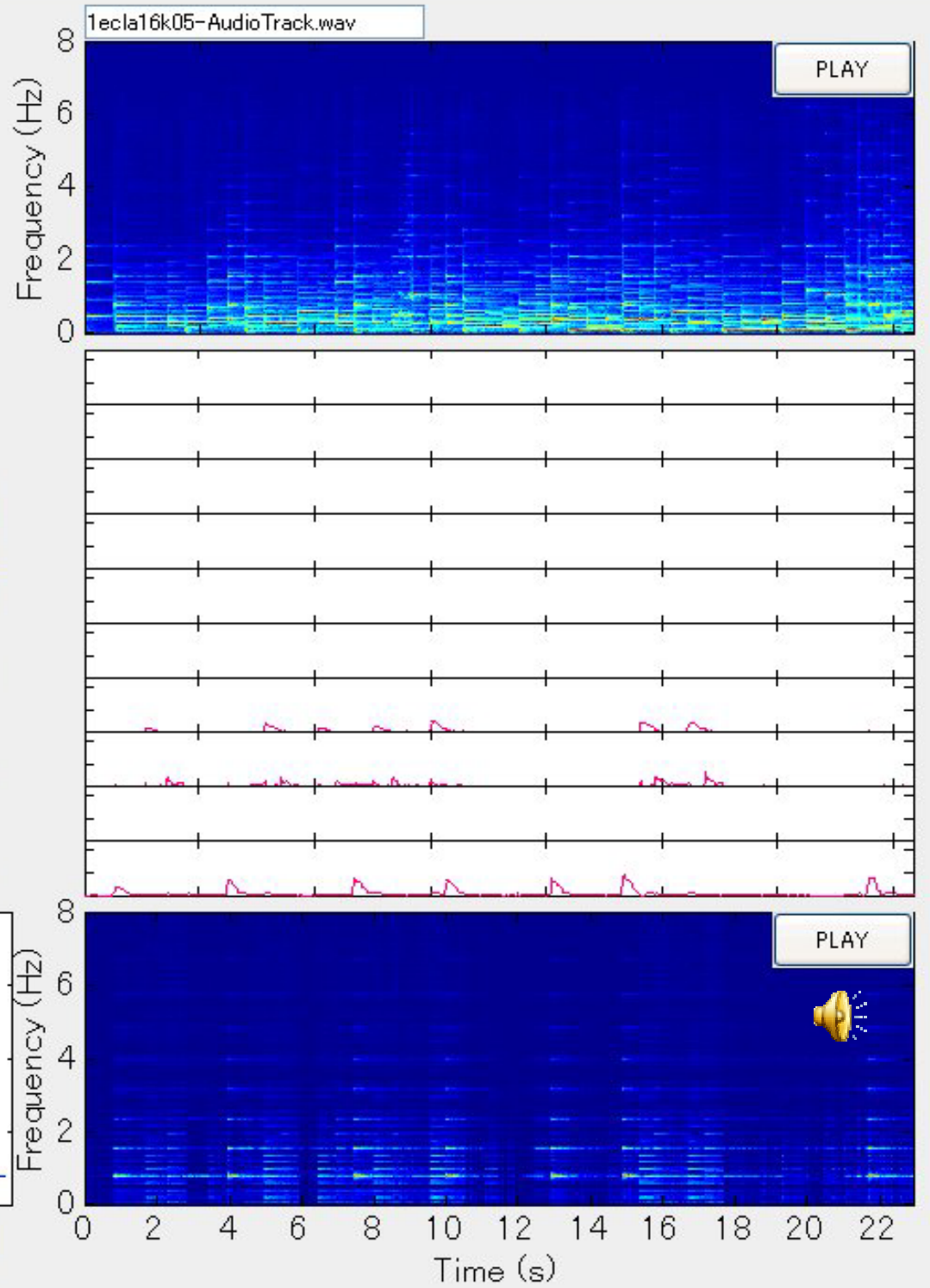
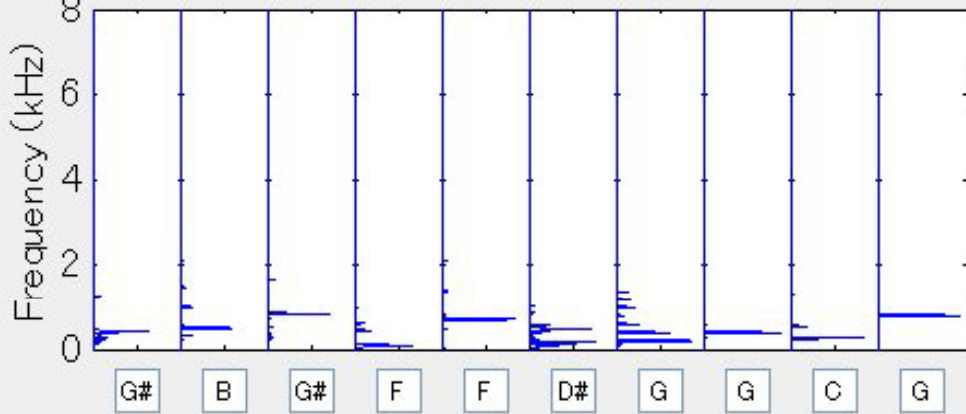
ト

「ソ」以外は音量オフ

0 m + 0 + - 0 -

ボリュームコントロール

0 M



Complex NMF

by H. Kameoka

Open サンプリング Hz フレーム長 ms
Factorize トータル時間 s
 スペクトルパーツ数 Save
 エンベロープパーツ数

表示するスペクトルパーツ

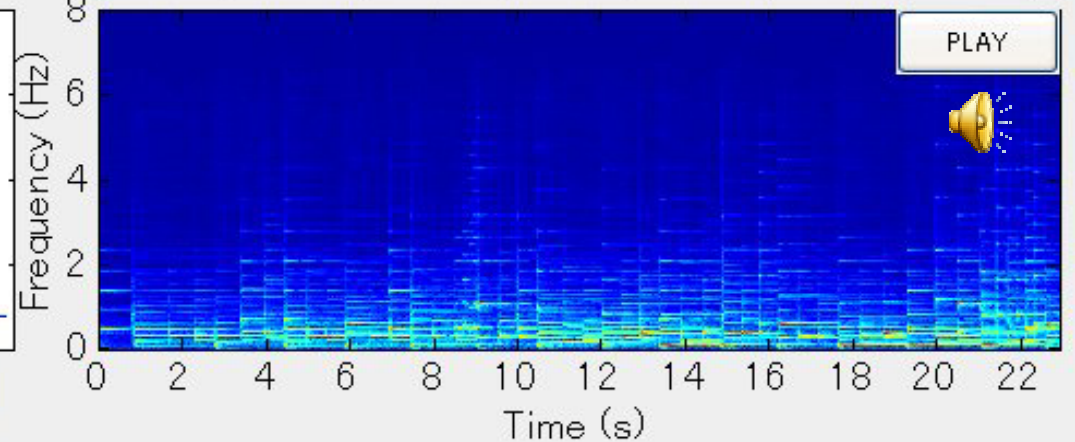
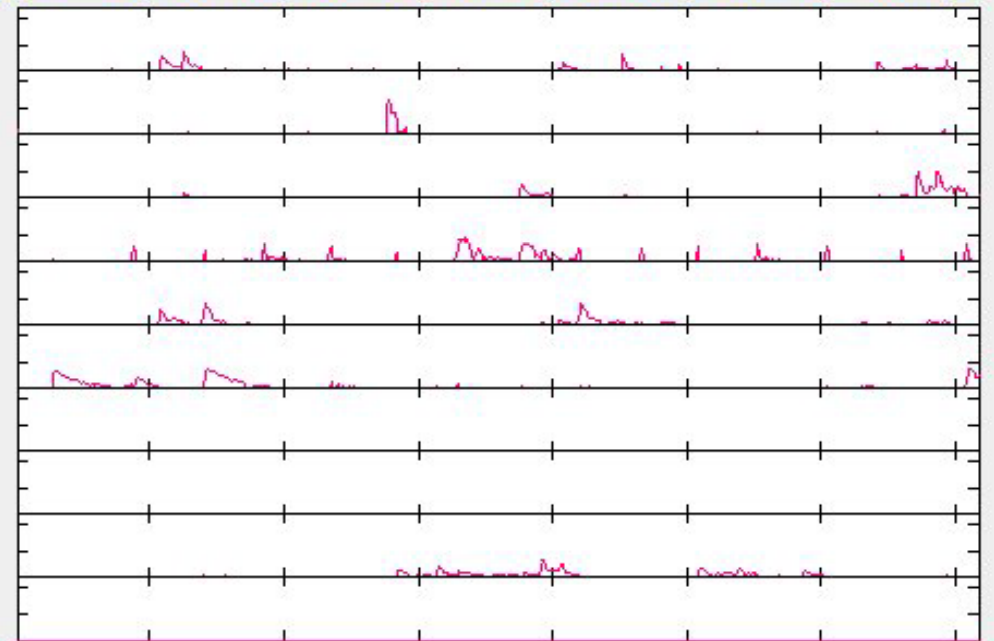
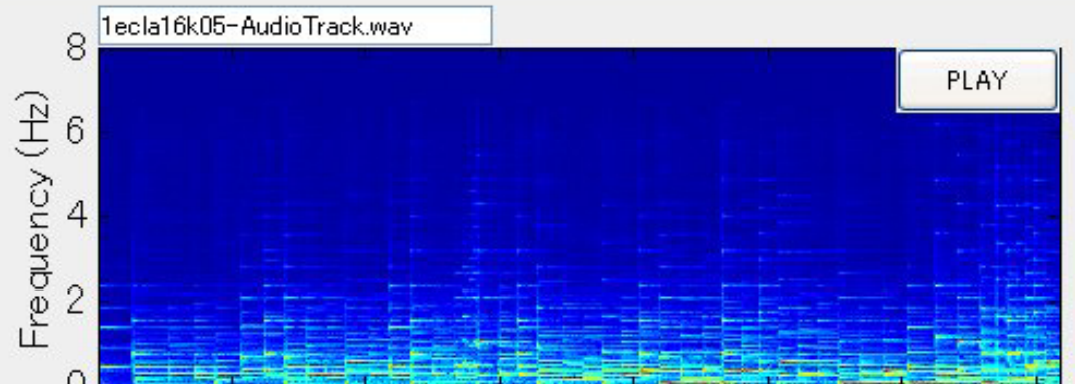
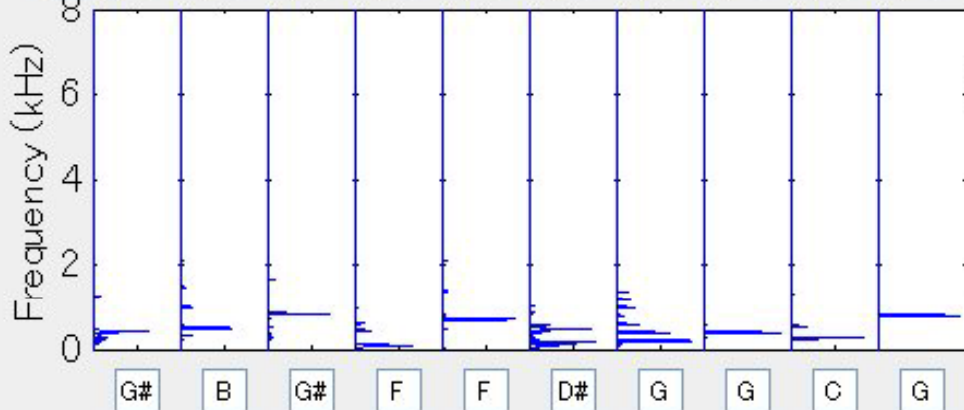
No. 1 - 10

ト

0 + +
m 0 0
 - -

ボリュームコントロール

0 M



一部の基底関数に対してのみスペクトル伸縮変形を施し、混合信号を再構成（スペクトル伸縮はピッチトランスポーズに相当。例えばトランスポーズ「-1」は、半音下げという意味。）

No. 1-10

トランスポ

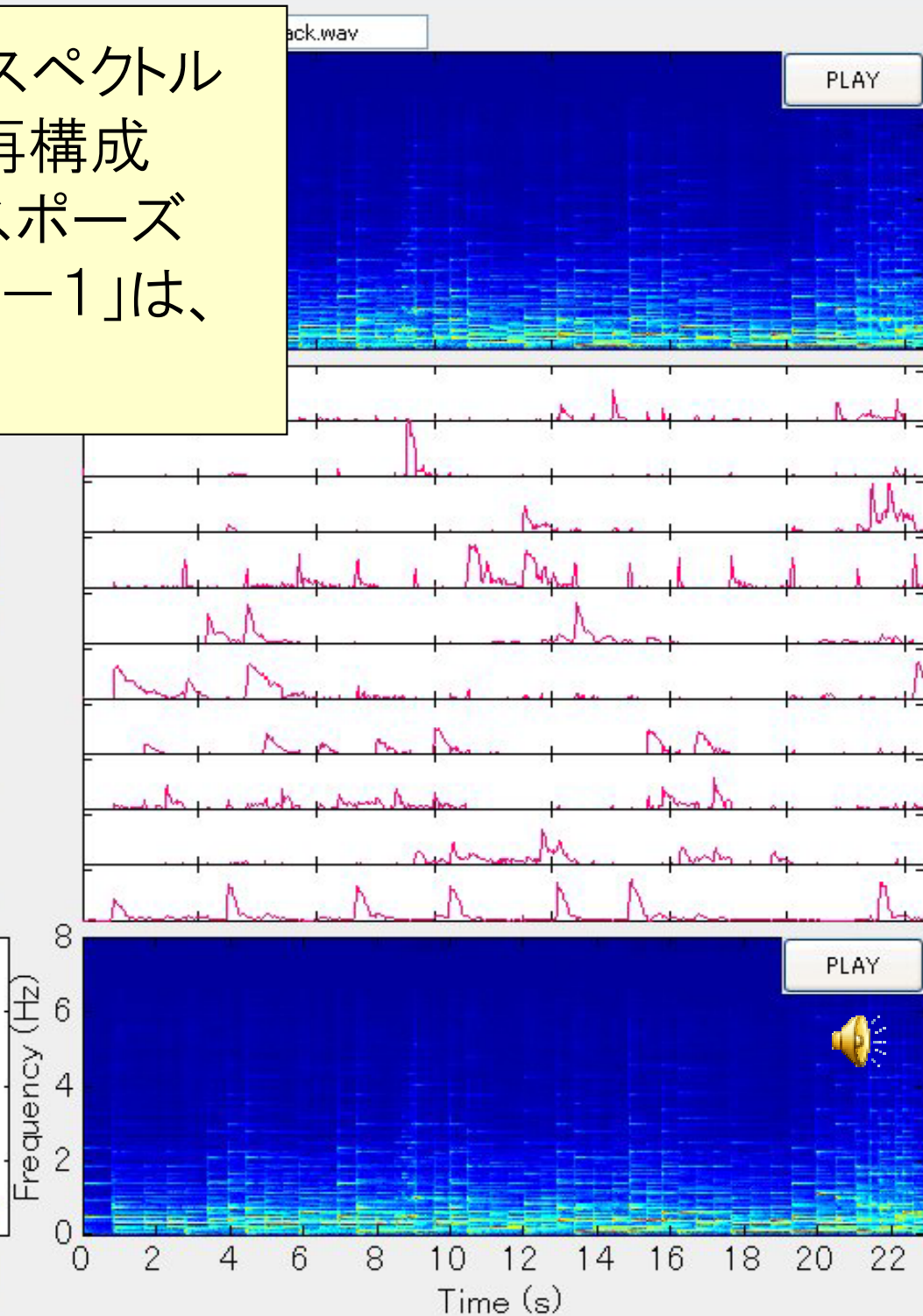
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1	-1
m	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ボリュームコントロール

▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
0									
▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼

Frequency (kHz)

G#	B	G#	F	F	D#	G	G	C	G
----	---	----	---	---	----	---	---	---	---



まとめ

1. 非負値行列因子分解(NMF)とは
 - 何に使えるのか(音響信号処理を題材として)
 - どのような性質があるのか
 - どのように求めるのか
 - 統計モデルとしての解釈とアルゴリズムの一般化
 - 他の技術とどう関係しているのか
2. 複素NMF [H. Kameoka et al., 2008]
 - NMFにおける問題点
 - 解決のためのアイデア
 - NMFとどう関係しているのか

参考文献

- [1] D. P. W. Ellis and J. Arroyo, “Eigenrhythms: Drum pattern basis sets for classification and generation,” Proc. *ISMIR 2004*, pp. 554-559, 2004.
- [2] D. D. Lee and H. S. Seung, “Learning the parts of objects with nonnegative matrix factorization,” *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, 1999.
- [3] P. Paatero, U. Tapper, “Positive matrix factorization: A non-negative factor model with optimal utilization of error estimates of data values,” *Environmetrics* **5**: 111–126, 1994.
- [4] P. Smaragdis and J.C. Brown, “Non-negative matrix factorization for music transcription,” Proc. *WASPAA 2003*, pp. 177–180, 2003.
- [5] D.D. Lee and H.S. Seung, “Algorithms for nonnegative matrix factorization,” Proc. *NIPS 2000*, pp. 556–562, 2000.
- [6] P. Smaragdis, B. Raj, M.V. Shashanka, “Supervised and semi-supervised separation of sounds from single-channel mixtures,” Proc. *7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, 2007.
- [7] P. Smaragdis and B. Raj, “Example-driven bandwidth expansion,” Proc. *WASPAA 2007*, in CD-ROM, 2007.
- [8] L.M. Bregman, “The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **7**: pp. 200–217, 1967.
- [9] A. Banerjee, S. Merugu, I.S. Dhillon and J. Ghosh, “Clustering with Bregman divergences,” *Journal of Machine Learning Research* **6**, pp. 1705–1749, 2005.

参考文献

- [10] I.S. Dhillon and S. Sra, “Generalized nonnegative matrix approximations with Bregman divergences,” *Proc. NIPS 2005*, pp. 283-290, 2005.
- [11] 亀岡, 後藤, 嵯峨山, “スペクトル制御エンベロープによる混合音中の周期および非周期成分の選択的イコライザ,” *情報処理学会研究報告*, 2006-MUS-66-13, pp. 77-84, 2006.
- [12] C. Févotte, N. Bertin and J.-L. Durrieu, “Nonnegative matrix factorization with the Itakura-Saito divergence with application to music analysis,” *Technical Report TELECOM ParisTech 2008D006*, 2008.
- [13] S. Eguchi and Y. Kano, “Robustifying maximum likelihood estimation,” *Technical report*, Institute of Statistical Mathematics, Research Memo. 802, 2001.
- [14] M. Nakano, H. Kameoka, J. Le Roux, Y. Kitano, N. Ono and S. Sagayama, “Convergence-guaranteed multiplicative algorithms for nonnegative matrix factorization with beta-divergence,” *Proc. MLSP2010*, to appear.
- [15] B.A. Olshausen, and D.J. Field, “Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images,” *Nature*, vol. 381, pp. 607–609, 1996.
- [16] G. Harpur, R. Prager, “Experiments with low-entropy neural networks,” in R. Baddeley, P. Hancock, P. Földiák (eds.) *Information Theory and the Brain*, Cambridge University Press, pp. 84-100, 2000.
- [17] T. Hofmann, “Probabilistic latent semantic analysis,” *Proc. UAI*, pp. 289-296, 1999.
- [18] 亀岡, 小野, 柏野, 嵯峨山, “複素NMF: 新しいスパース信号分解表現と基底系学習アルゴリズム,” *日本音響学会2008年秋季研究発表会講演論文集*, 2-8-13, pp. 657-660, 2008.