

コヒブレク

♡ ちょっとしたエッセイ

点推定における意外な落とし穴

亀岡弘和 (東大/NTT)

今回、せっかく本誌のエッセイを書く機会を与えられたので、以前ふと気になり出して今なおモヤモヤしていることについて書きつづってみたいと思う。

統計推定には点推定というクラスがある。最尤推定や最大事後確率推定がこれに該当し、広く使われている未知量の推定方法である。具体的には、所与のデータ X の確率的な生成源のモデル $p(x|\theta)$ を立て、 X を最もよく説明する生成源モデルのパラメータ θ の値を推定することをいう。特に、 $p(\theta|X)$ が最大になる θ を推定することを最大事後確率推定という。 $p(X|\theta)$ が最大になる θ を推定することを最尤推定というが、 $p(\theta|X) \propto p(X|\theta)p(\theta)$ なので、最大事後確率推定において $p(\theta)$ を一様分布とした場合の特殊ケースに相当する。

さて、本題に入ろう。 θ が連続量の場合、 $p(\theta|X)$ は確率密度関数になるが、 θ の最大事後確率推定値はその最大点 $\hat{\theta}$ になる。このことは、教科書にはごくごく当たり前のことのように書かれていて、あるときまで私も疑いなくそういうものだと思っ受け入れてきたが、 θ を変数変換してみると実はおかしなことになることに気付く。今、簡単のため1変数の場合を考え、例えば、 $\alpha = \theta^2$ と変数変換してみよう。単に変数 θ を α に置き換えただけで、生成源のモデルとしては本質的には何も変わっていないはずであるから、 θ の推定値を $\hat{\theta}$ とすると、 α の推定値 $\hat{\alpha}$ はその平方根となると考えるのが自然であろう。しかし、実際にはそうならないのである。例えばもし $p(\theta) \propto 1$ (一様分布) のとき、 $d\alpha = 2\theta d\theta$ より $p(\alpha) \propto \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ となる。つまり $p(\alpha)$ は一様分布ではなく $\alpha = 0$ に近いほど大きい値をとる分布になる。一方、 $p(X|\alpha)$ は $p(X|\theta)$ において θ を $\sqrt{\alpha}$ に置き換えたものになるので、 $p(\alpha|X) \propto p(X|\alpha)p(\alpha)$ を最大にする α は、 $p(\theta|X) \propto p(X|\theta)p(\theta)$ を最大にする θ の平方根に比べ、 $\alpha = 0$ に寄った値になる。仮定しているのは同じモデルのはずなのにどの領

域で最大点を探すかによって推定される生成源が異なったものになってしまうわけだ。(意外と気付かれていないような気がするが) 実はこの一見して矛盾した現象は、確率ではなく確率密度関数の最大点を求めようとしていたことに起因する。確率密度関数は値自体には確率としての意味はなく、積分したときに初めて確率としての意味を持つものである。従って、その最大点には「最大確率」という意味はないのである。事実、もし θ が離散量であれば上記のような不具合は起こらない。それは $p(\theta|X)$ が確率密度関数ではなく確率になるからだ。また、最小平均二乗誤差 (MMSE) 推定もよく知られる点推定の一つであるが、MMSE 推定においても上述のような不具合は起こらない。MMSE 推定量は条件つき期待値 $\mathbb{E}[\theta|X]$ で与えられ、確率密度関数を積分して得られる量だからだ (詳細は省略するが $\mathbb{E}[\theta|X] = \mathbb{E}[\sqrt{\alpha}|X]$ が言える)。

θ が連続量の場合の最大事後確率推定又は最尤推定は広く用いられているが、上述の問題は必ずしも意識されてこなかったように思う。私もあるときふと気付くまでは意識したことすらなかったが、今では無性に気になってモヤモヤしている。皆様はどうだろうか。本エッセイを通して、点推定に関して一考するきっかけとなれば幸いである。

♣ 私のすすめるこの一冊

「ブラックジャック」, 手塚治虫著, 秋田書店
鈴木久晴 (日本エヴィクサー)

先日、友人の息子さんが中学生になりました。小さい頃から私をとっても慕ってくれて、今でも直接LINEをくれるような仲だったので、何かお祝いでもと悩んでいました。私が子供の頃は読書が大嫌いで、お祝いに児童文学の文庫本とかいただいても当時はあまり喜べなかったのを思い出し (名作を読んでおくのはもちろん後でとても役に立つのですが)、「そうだ漫画だ」と思っているいろいろ悩んで贈ったのが手塚治虫先生の「ブラックジャック」です。とても有名な作品なので今更という感じもありますが、凄腕の外科医ブラックジャックと登場人物が織りなす様々な人間ドラマが見所の作品で、夏でも黒いコート、一見冷徹だが心温かいブラックジャックのキャラ設定になんとも言え

ない魅力があります。

私が一番好きなエピソードが「助け合い」というエピソードです。海外で、ブラックジャックが殺人容疑をかけられる危機に陥ってしまいます。その窮地を救うのが日本から出張に来ていた会社員で、帰国の飛行機をドタキャンしてまで警察に行き証言し、ブラックジャックの無実を証明するのです。「あなたに何かあったら、私は必ず助けます」そう約束してブラックジャックと会社員は空港で別れるのです。ほどなくして、彼が会社の紛争に巻き込まれて自殺を強要されてしまい、瀕死の状態に陥ってしまいます。それをテレビのニュースで聞いたブラックジャックが、すごい勢いで彼を助けに行くのです。レンタカー屋に飛び込んで車を札束で購入、途中でモーターボートに乗り換えて病院に向かう。もちろんモーターボートなんていきなり買えないのですが、スーツケースいっぱいの現金で購入。病院について、ブラックジャックの執刀を渋る院長、そこも現金一括 20 億円で病院を購入、自分で執刀して見事に彼を救ってしまうのです。更に粋な計らいもあるのですが割愛して、なぜここまでしてくださったんですかという彼の最後の一言に「お互い様でさあ、あなたに助けられたときはもっとうれしかった」の一言。小学生だった私に、大切なことを教えてくれた一話でした。

最近になって、友人の息子さんと LINE で感想を聞いてみました。「今までとなんか違う面白さだよ！」と。僕の伝えたかったことは、なんとなく伝わっているのかも知れませんが、彼がもう少し大人になったらまた話してみたいと思います。

いる電波は、導電率のある媒質中を伝搬すれば損失を受けることになるので、距離と共に徐々に減衰します。導電率が大きいほど減衰が大きいため、水よりも海水の方が減衰は大きくなります。水中や海中の減衰は、空中の電波の減衰と比較すると格段に大きいので、その比較から「水中では電波が伝搬しない」と強調して説明されることがあります。しかし、まったく伝搬しないわけではないので、距離が短ければ水中でも電波の伝搬を検出することができます。

海水は淡水に比べ導電率が大きいので、減衰も大きく、伝搬はより困難となります。減衰は導電率だけではなく、周波数にも依存し、周波数が大きいほど、減衰も大きくなります。100 MHz 程度までの電波では、減衰は周波数の 1/2 乗に比例するので、周波数を 1/100 にすれば、伝搬距離は 10 倍大きくなります。例えば、10 kHz の電波では海面から 5m の深度で、海面から入射したエネルギーは 1% 程度に減少してしまいますが、100 Hz ではエネルギーが 1% 程度に減少する距離は 50m と増加します。周波数が低くなれば波長が長くなるため、アンテナの長さも大きくする必要はありますが、深度に応じて適当な周波数を選べば、ある程度の深さまでは受信が可能と考えられます。海水中のみの通信であれば音波を利用した方が減衰は小さく長距離の伝搬が可能ですが、電波を空中を長距離伝搬させ、海中の航走体など海中の機器まで届かせようとすれば、周波数の低い電波を用いることが必要となります。

(蜂屋弘之：東工大)

Q&A コーナー

Q. 水中では電波が伝搬しないのはなぜでしょうか？ 一方、潜水艦などでは、電波による通信がなされていますがなぜ可能なのでしょう？

A. 真空中では導電率が 0 ですが、水や海水ではそれぞれ $5.5 \mu\text{S/m}$ (理論純水, 25°C)、約 5 S/m と値を持つこととなります。通常の水は、わずかですが様々な物質が溶け込んでいるので水道水で 10 mS/m 程度と導電率は純水より大きな値となります。3 THz 以下の電磁波と電波法で定義されて

—原稿募集—

「コーヒーブレイク」欄は会員の情報交換の場として、より親しく利用していただくという欄です。内容は問いません。自由なご意見、提言や反論、質問や回答など何でも結構です。

投稿要領 10 字程度の表題、氏名、勤務先、部課名、電話番号、コーヒーブレイク欄への投稿であることを明記。本文は 22 字×40 行以内。原稿は編集委員会で検討の上順次掲載。編集委員会で手直しすることもあります。掲載は無料。投稿はなるべく e-mail でお願いします。

送付先 一般社団法人日本音響学会編集委員会

e-mail: LEJ02517@nifty.ne.jp

〒101-0021 千代田区外神田 2-18-20

ナカウラ第 5 ビル 2 階

Tel. 03-5256-1020, Fax: 03-5256-1022