

音楽を素材とした  
人間の情報処理機構の研究

指導教官 中野 馨 講師

昭和五十五年二月

東京大学大学院工学系研究科

計数工学専門課程

守谷 健弘

# 目次

序論	2
第一章 音楽の周波数分析	
1. 前提	4
2. 方法	5
3. 周波数分析の結果	6
4. その他の考察	8
第二章 「1/4」のモデル	
1. モデルの背景と位置づけ	10
2. モデル I	11
3. モデル II	18
4. モデル III	20
第三章 主題	
1. 音楽の構成と「1/4」ゆらぎ	24
2. 音楽の構造と人間	28
3. 人間の情報処理能力	29
4. 展望	33
要約と結論	35
謝辞	36
参考文献	38
付録	40

# 序論

典型的な芸術のひとつである音楽も、実は人間の認知機構によって設計され、伝達され、応答される信号の系列と見なすことができる。計算機等の発達により、芸術家でなくとも、音楽を分析したり、合成したりすることができるようになったのも当然である。本研究はこの方向で、音楽と人間の情報処理機構の系を主として、信号処理や数理モデル等の工学的手法を使って探らうとする試みである。こうして得られる人間の情報処理機構の一断面が高度な情報処理技術へのヒントとなり得ることを期待しているわけである。

きっかけは 1975 年に Voss et. al. [1] によって、音楽の信号のゆらぎはそのパワースペクトルが周波数に反比例する傾向が発見されたことにある。このことに刺激され、この「 $1/f$ 」という性質は、音楽の持つどのような基本的な性質と対応しているか、さらにそれは人間の音楽に対するどのような接し方と対応しているのかということに、非常に興味をいだいた。この疑問に対する厳密

な結論を得ることは、問題の性格上困難であるが、モデルの考察を軸に以下のような推論を進める。

まず第一章において、実際に音楽を信号処理し、周波数分析をして、近代音楽のゆらぎのパワースペクトルは、「 $1/f$ 」になる傾向を確認した。第二章ではパワースペクトルが「 $1/f$ 」となる数学的近似モデルについて考察した。第三章では、音楽のリズムから曲全体に至る階層構造をモデルと対応づけ、さらに心理実験の事実などから人間の情報処理機構の性質との対応を推論した。

# 第一章 音楽の周波数分析

## 1. 前提

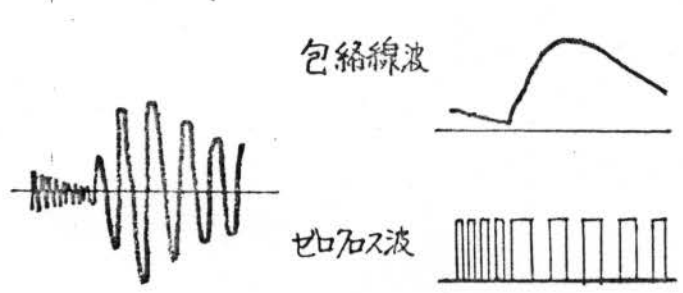
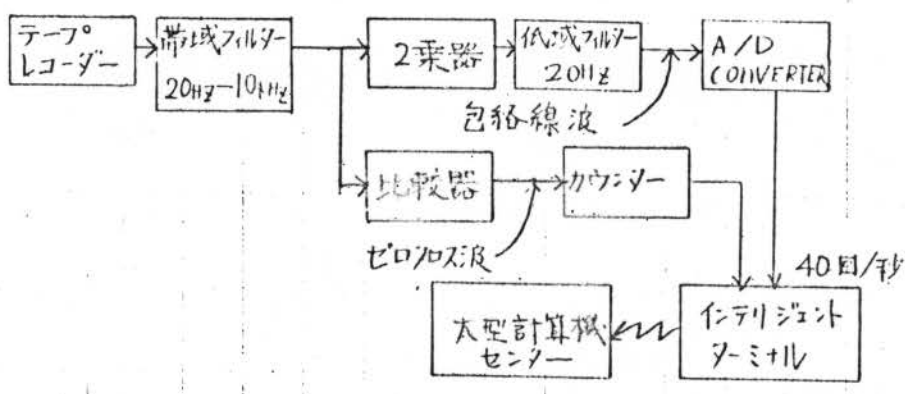
この章では 音楽のゆらぎの周波数分析実験の結果を中心に述べる。実験は Voss et al. [1][2] の結果の追試が一つの目的となるが、以下に述べる自分なりの立場で、この実験の意義を明確化したい。

音楽の音の信号は 作曲家や演奏家が楽器や声を使って、大きさ、長さ、高さを指定し、自分の創造的变化を表現した産物であると考えられる。これを、工学の通信のアプローチで考えることができる。つまり、 $20\text{ Hz} \sim 20\text{ kHz}$  の可聴音を搬送波として、 $20\text{ Hz}$  以下の創造的变化を、周波数なり振幅で変調して表現したものが音楽の信号である。そこで、音楽を通信で使われる周波数復調、振幅復調をしてやれば、 $20\text{ Hz}$  以下の創造的時間変化が観測されるはずである。ここで観測される信号は、耳の基底膜からパターンとして認識される音の音色の情報はない。旋律の動き、曲の盛衰などの楽符の音の系列のもつ情報、すなわち、人間の意識で感じる時間変化の情報

が含まれている。この信号の性質を調べるために、これを定常確率過程とみなし、周波数分析を試みたわけである。

### 2. 方法

Fig. 1-1 のブロック図に示すような信号処理装置を製作し、テープレコーダの Line 出力から、平均パワーとゼロクロス数 (Fig. 1-2) を 8 bit のデジタル信号として 40 回/秒でサンプリングした。回路の詳細は付



↑ Fig. 1-1  
← Fig. 1-2

録 (Fig. A-1) に載せた。採集した値は、高周波の分析 ( $0.01 \text{ Hz} \sim 20 \text{ Hz}$ ) にはそのまま、低周波の分析 ( $0.001 \text{ Hz} \sim 1 \text{ Hz}$ ) には、20回の平均値をとり、インテリジェント端末から、電話回線 (1200 band) を通じて、本学大型計算機センターへ送り、処理した。パワースペクトルは、1000 ~ 10000 個の時系列に、赤池法を参考に、とくに例外を除いて 20 ~ 60 次の自己回帰式をあてはめることで求めた。この方法は分析する過程のとり値がガウス分布であるときには、与えられたデータから、最大の情報が得られるという裏づけがあり、FFTによるパワースペクトル推定よりも、安定性、分解能に優れ、任意の周波数での推定ができるという利点を持っている。[12]

### 3. 周波数分析の結果

付録 Fig. A-2 ~ Fig. A-19 にまとめて載せた。

いずれも横軸が周波数の対数、縦軸がパワーの対数で、横軸は  $\text{Hz}$  の単位で意味があるが、縦軸の絶対値には意味がない。1  $\text{Hz}$  には矢印で注意を促した。また、曲線上の

記号は区別のために、推定周波数点の3~5個間隔に入れただけのものである。

周波数分析の結果、パワースペクトルが  $1/f$  になっていることは両対数のグラフ上で  $-1$  傾斜の直線となる。ところが、現実に得られたグラフが どのくらい「 $1/f$ 」に近いかを定量的にしかも物理的に意味があるように定義することはできなかつた。解釈は第3章で述べるとして、定性的に以下のような観察上の判断を下した。

- 1) ヨーロッパの古典的音楽は「 $1/f$ 」に近い。(Fig. A-2 ~ Fig. A-7)。1 Hzより高周波でも「 $1/f$ 」に近いが、 $10^{-2}$  Hz (数分のオーダー)以下で平坦になる場合も認められる。(Fig. A-4, 5, 7)
- 2) 即興曲も含め、現代のジャズ、ロックは「 $1/f$ 」に近い。(Fig. A-8 ~ Fig. A-10)
- 3) 現代の日本のフォークソング、伝統的な日本民謡は曲が短いこともあり、数秒より短いところで「 $1/f$ 」に近いが、長いところで平坦となる傾向がある。



(Fig. A-11, 14, 15) グレゴリウス聖歌や雅楽も別の要素はあるが、傾向としてはよく似ている。

(Fig. A-12, 13, 16)

- 4). 謡曲や、純粹な言語は「 $1/f$ 」から遠い。(Fig. A-17 ~ Fig. A-19)

以上の4点のうち、1), 2)は Voss et al. [2] の結果と定性的に一致する。4)の言語の結果についても矛盾しない。

#### 4. その他の考察

音楽を直接聞いた印象と、採集されたデータをグラフにした系列を見た印象がかなり違っていた。とくにパワーの時系列のグラフは音の強いところを強調しすぎるのは明らかであった。そこでパワーもゼロクロス数も生の物理量から、[10]を参考に大ざっぱな心理量に変換してみた。(Fig. A-21, 22) この値を使って、パワースペクトルを求めたところ、(Fig. A-20) 定性的に「 $1/f$ 」という傾向は保存されていた。このことは、前項で述べ

のような人間の創造的変化の性質は、Fig. 1-1 の処理で得られたデータの持つ「1/f」という性質を持っていることが確かめられたことを意味する。

最後になったが、時系列のデータの度数分布を求めて付録に載せた。(Fig. A-23, 24) 音楽では、とくに心理量に変換したデータ(破線のヒストグラム)でガウス分布に近くなっている。それに対し、ニュースでは、とくに平均化時間 25ms で0(無音)に偏っている。これは音楽では、音の強さ、高さ、長さによく多くの情報が含まれるのに対し、言語では、文法の組立の中で、音韻の符号に情報が含まれるという性質の反映であろう。つまり、もともと言語は Fig. 1-1 の処理で、人間の情報処理に関する要素が失われてしまう。同じようなことで、自然音を Fig. 1-1 で処理しても意味はないし、また、音そのもののパワースペクトルは音色に関する性質を反映し、直接の比較は意味がないことを注意しておく。

## 第二章 「1/f」のモデル

### 1. モデルの背景と位置づけ

物理現象の中で時間変化のパワースペクトルが  $1/f$  に近くなるものには、半導体や抵抗のフリッカー雑音、水晶発振器を初めとする周波数標準器の周波数のフリッカー変動などがある。これらは50年近く前から、よく知られているにもかかわらず、統一的な数学モデルはないようである。と言うのも厳密に  $1/f$  という形のパワースペクトルは存在し得ないことにもよる。つまり、パワースペクトルを周波数で積分した量はエネルギーとなるが、 $1/f$  の形は  $f \rightarrow 0$  でも、 $f \rightarrow \infty$  でも収束しないし、パワースペクトルの前提となる定常性にも矛盾してしまう。そこで、ここでは  $\varepsilon \ll \omega (=2\pi f) \ll N$  でのみ  $1/f$  が成立するような現実に存在する近似モデルを考察する。

まず第2節では多種の時定数の異なる独立な系の平均モデルを導き、その具体例を示す。第3節では入出力のモデルを導き、ステップ応答、インパルス応答の近似関数を導く。第4節では熱伝導方程式モデルを紹介し、他

のモデルとの対応をつける。

ここで述べる近似モデルは今までに知られている1/fのモデルを含み、また、時定数の異なる系の和という点で共通しており、本質的性質を持つようである。原理的に近似モデルは無限に存在するが、何らかの形で時定数の異なる系の和という性質とつながると思われる。

## 2. モデル I

**命題 1** 自己相関関数  $R(\tau)$  が時定数  $T$  によって伸縮され、 $R(\tau/T)$  と表せる独立な多数の過程を  $\log T$  で平均した出力のパワースペクトルは  $1/f$  で近似される。

**証明**  $R(\tau)$ ,  $R(\tau/T)$  から一意に定まるパワースペクトルをそれぞれ  $P(\omega)$ ,  $P_T(\omega)$  とする。

$$P(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (2-1)$$

$$P_T(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau/T) \cos \omega \tau d\tau \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned}
 P_T &= T \int_0^{\infty} R(u) \cos(\omega T u) du \\
 &= T P(\omega T) \qquad (2-3)
 \end{aligned}$$

$P_T(\omega)$  をもつ系を  $T$  を変数として、 $\log T$  の重みで平均した結果のパワースペクトル  $\bar{P}(\omega)$  は、各系の独立性の仮定から、 $P_T(\omega)$  の和で次の積分で近似される。

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(\omega) &= \int_{\varepsilon}^N T P(\omega T) d(\log T) \qquad (0 < \varepsilon \ll 1 \ll N) \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_{\varepsilon \omega}^{N \omega} P(u) du \\
 &= \frac{1}{2\pi f} \left\{ C - O(\varepsilon \omega) - O\left(\frac{1}{N \omega}\right) \right\} \qquad (2-4)
 \end{aligned}$$

ここで以下の仮定を用いた。

$$\left\{ \begin{aligned} C &= \int_0^{\infty} P(u) du < \infty \qquad (2-5) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^x P(u) du &= O(x) \qquad x \ll 1 \qquad (2-6) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_x^{\infty} P(u) du &= O(x^{-1}) \qquad x \gg 1 \qquad (2-7) \end{aligned} \right.$$

$\frac{1}{N} \ll \omega \ll \frac{1}{\varepsilon}$  の範囲で  $\bar{P}(\omega) \propto 1/f$

証明終

(2-5)は有限な自己相関関数に対応するパワースペクトル $P(\omega)$ の条件である。また、(2-6,7)は $P(\omega)$ が $\omega \rightarrow 0$  と  $\omega \rightarrow +\infty$  で収束するための十分条件で、細かい形状に依存しない。

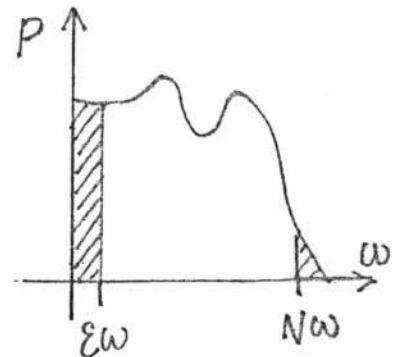


Fig. 2-1

系 パワースペクトル $P(\omega)$ が時定数 $T$ によって伸縮され、 $P(\omega T)$ と表せる独立な多数の過程の平均出力のパワースペクトル $\bar{P}(\omega)$ は $1/f$ に近似される。

証明 (2-4)の第1式が

$$\bar{P}(\omega) = \int_{\epsilon}^N P(\omega T) dT \quad (2-8)$$

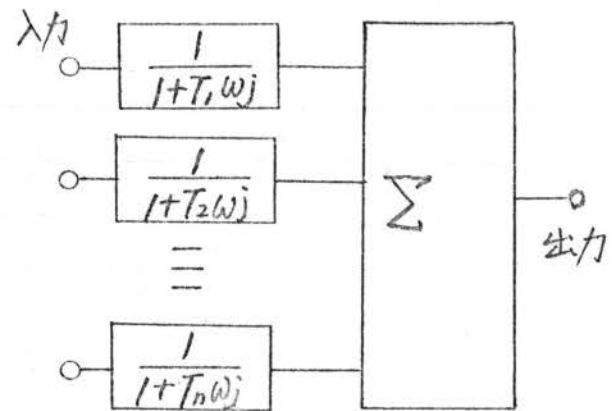
と表せることでまったく同様。

証明終

以上の結果を使って、具体的な簡単なモデルを2例紹介する。自己相関関数も計算してみる。

## 例 1

Fig. 2-2 で示される  
たがい独立な白色雑  
音を入力とする時定数  
の異なる一次系の平均



出力のパワースペクトル

Fig. 2-2

は  $1/f$  に近似される。このモデルは物性の研究  
で使われているようで、具体的には次式で表せる。

$$\begin{aligned} \bar{P}(\omega) &= \frac{1}{\omega} \left\{ \arctan(N\omega) - \arctan(\epsilon\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\pi}{2} - O\left(\frac{1}{N\omega}\right) - O(\epsilon\omega) \right\} \quad (2-9) \end{aligned}$$

また、出力の自己相関関数  $\bar{R}(\tau)$  も各  $R(\tau/T_i)$   
の和となるから、次のように計算できる。

$$R(\tau/T_i) = \frac{1}{T_i} e^{-\frac{\tau}{T_i}} \quad (2-10)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(\tau) &= \int_{\epsilon}^N \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} dT \\ &= \int_{\tau/N}^{\tau/\epsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2-11) \end{aligned}$$

$$Ei(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (2-12)$$

$$= \gamma + \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n! \cdot n} \quad (2-13)$$

$$Ei(-x) \sim e^{-x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n} \right) \quad (2-14)$$

という積分指数関数とベキ級数展開 (2-13) と漸近展開 (2-14) を利用すると (2-11) は次のようになる。(  $\gamma$  は Euler 定数で  $0.57\dots$  )

$$\begin{aligned} \bar{R}(\tau) &= Ei(-\tau/\varepsilon) - Ei(\tau/N) \\ &\sim \frac{\tau}{N} - \gamma - \log \frac{\tau}{N} - e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}} \left( + \frac{\varepsilon}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\text{さらに } \bar{R}(\tau) \sim C - \log \tau \quad (2-16)$$

という近似も可能である。(  $C$  は定数  $\sim \log N - \gamma$  )

### 例 2

Fig. 2-3 のように独立  
な乱数値を  $T \cdot 2^k$  ごとに  
サンプルしてホールド

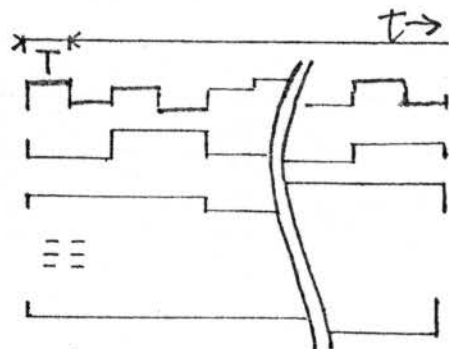
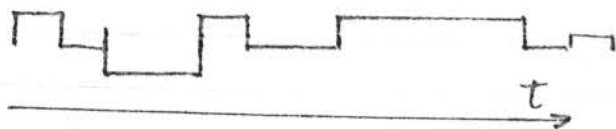


Fig. 2-3



する過程の平均出力は命題 1 によってパワースペクトルが  $1/f$  に近似される。

また、独立性から、Fig



2-4 のように時間的

Fig. 2-4

にサンプル時間を同じ割合で分布させた過程でも同じである。実は音楽のもつ構造、人間の認識の構造についてこのモデルを利用することになる。また、[3] で紹介された、計算機による簡単な  $1/f$  過程の発生アルゴリズムの根拠ともなっている。

各過程の自己相関関数、パワースペクトル、平均の自己相関関数、パワースペクトル、 $R(\tau/T)$ 、 $P(\omega T)$ 、 $\bar{R}(\tau)$ 、 $\bar{P}(\omega)$  の結果を示す。

$$R(\tau/T) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{T} & 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & T < \tau \end{cases} \quad (2-17)$$

$$P(\omega T) = \frac{T \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} \quad (2-18)$$

$$\bar{P}(\omega) = \frac{2}{\omega} \int_{\frac{\omega \epsilon}{2}}^{\frac{\omega N}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du \quad (2-19)$$

$$\overline{P}(\omega) = \frac{2}{\omega} \left\{ \frac{\pi}{2} - O(\varepsilon\omega) - O\left(\frac{1}{N\omega}\right) \right\} \quad (2-20)$$

$$\overline{R}(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau=0 \\ 1 - \frac{1}{n} \left( \log_2 \tau + \frac{2^n - \tau}{2^{n-1}} \right) & 0 < \tau \leq 2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} < \tau \end{cases} \quad (2-21)$$

ただし、(2-21)は離散的に  $R(\tau/T)$  を加算したもので  $2^{n-1} \sim N$  として (2-15, 16) と対応する。

以下に示す近似式をもとに自己相関関数をフーリエ変換(数値積分)したグラフを (Fig. A-25) として付録に載せた。(2-21) と (2-16) の近似である。

$$\begin{cases} \overline{R_{(a)}}(\tau) = 1 - \frac{1}{10} \left( \log_2 \tau + \frac{1024 - \tau}{512} \right) \\ \overline{R_{(b)}}(\tau) = 0.8 - 0.09 \log_2 \tau \\ \overline{R_{(a)}}(0) = \overline{R_{(b)}}(0) = 1 \\ \overline{R_{(a)}}(512) = \overline{R_{(b)}}(512) = 0 \end{cases} \quad (1 \leq \tau \leq 512) \quad (2-21 A)$$

$$P(\omega) \approx P(m) = \sum_{k=1}^{512} \overline{R}(k) \cos\left(\frac{2\pi mk}{512}\right) \quad (2-21 B)$$

これによると「1/f」のよい近似であることが判明する。

### 3. モデル II

時定数パラメータ  $T$  をもつ周波数応答関数  $g(\omega j)$  の平均で与えられる系のパワースペクトルが  $1/f$  に近似できれば、1入力1出力系のモデルができることになり、ステップ応答、インパルス応答の計算ができる。

命題 2 周波数応答関数  $g(\omega j)$  を  $1/\sqrt{T}$  の重みづけ平均をとった系のパワースペクトルは  $1/f$  で近似される。ただし、周波数応答関数の実部、虚部  $g_R(\omega)$ ,  $g_I(\omega)$  について次式を仮定する。

$$\int_{\varepsilon}^N g_{R/I}(\omega^2) d\omega = C_{R/I} - O(\varepsilon) - O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (2-22)$$

証明 平均周波数応答関数  $\overline{g(\omega j)}$  は

$$\begin{aligned} \overline{g(\omega j)} &= \int_{\varepsilon}^N \frac{1}{\sqrt{T}} g(\omega j T) dT \\ &= \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_{\sqrt{\varepsilon \omega}}^{\sqrt{N \omega}} g(u^2 j) du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_{\sqrt{\varepsilon \omega}}^{\sqrt{N \omega}} \{g_R(u^2) + j g_I(u^2)\} du \quad (2-23) \end{aligned}$$

このパワースペクトル  $P(\omega)$  は

$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= | \overline{g(\omega)} |^2 \\
 &= \frac{4}{\omega} \left[ \left\{ \int_{\sqrt{\varepsilon\omega}}^{\sqrt{N\omega}} g_R(u^2) du \right\}^2 + \left\{ \int_{\sqrt{\varepsilon\omega}}^{\sqrt{N\omega}} g_I(u^2) du \right\}^2 \right] \\
 &= \frac{4}{\omega} \left( C_R^2 + C_I^2 - O(\sqrt{\varepsilon\omega}) - O\left(\frac{1}{\sqrt{N\omega}}\right) \right) \quad (2-24)
 \end{aligned}$$

証明終

$g = \frac{1}{1+\omega j}$  といういちばん簡単な例を使ってパワースペクトル、インパルス応答、ステップ応答の計算結果を具体的に示す。(Fig. 2-6)

計算は付録にまとめておく。(A-9, 16, 18)

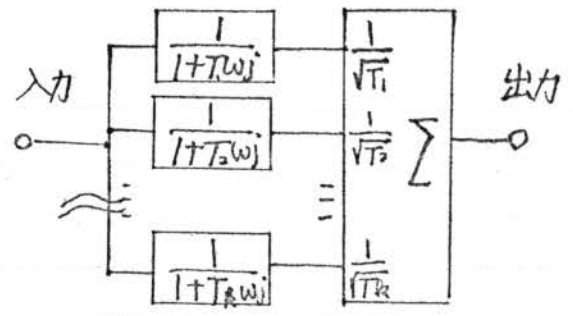


Fig. 2-6

$$P(\omega) \doteq \frac{\pi}{\omega} \left( \pi - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{N\omega}} - 2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon\omega} \right) \quad (2-25)$$

$$I(t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2-26)$$

$$H(t) \propto \sqrt{t} \quad (2-27)$$

## 4 モデル III

これは熱伝導方程式によるモデルで、今までにもよく知られている理想化されたモデルである。自分なりの証明を述べ、応用やモデルIIとの対応を考える。

命題 3 (2-28~30) で表されるように、半無限次元熱伝導体の一端にホワイトノイズ性の熱量を時系列として与えると、その端点の温度の時間変化のパワースペクトルは  $1/f$  になる。端点で  $x=0$  とする。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(t), \quad u(x,0) = 0 \quad (2-29)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l f(t)f(t+\tau) dt = \delta(\tau) \quad (2-30)$$

証明 この方程式の解は以下のように知られている。

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (2-31)$$

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-\xi) f(\xi) d\xi \quad (2-32)$$

(2-32) は コンボリューションであるから、 $t$  について両辺を  
ラプラス変換する。

$$\begin{aligned} U(x, s) &= W(x, s) \cdot F(s) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-x\sqrt{s}} \right) \cdot 1 \end{aligned} \quad (2-33)$$

$U$  の パワースペクトル  $P(\omega, x)$  は

$$\begin{aligned} P(\omega, x) &= |U(x, s)|^2 \\ &= \frac{1}{\omega} e^{-x\sqrt{2\omega}} \end{aligned} \quad (2-34)$$

$$x=0 \text{ で } P(\omega) \propto \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi f} \quad (2-35)$$

証明終

(2-28~30) で表現される物理現象は数多くあり、独立な入力の重ね合わせも可能で、このモデルに適合する現象は数多く存在するはずである。その一例として、近似的に等価な、有限長、離散的 CR 線路を紹介し、相互干渉のようすや、モデル II との対応を考える。

Fig. 2-7 の左端点のインピー

ダンスを  $Z(CRS)$  とする。これが CR

によるモデルである。

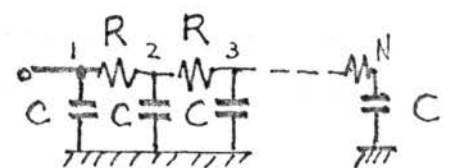


Fig. 2-7

$Z$  (CRS) は簡単な

計算により, Fig. 2-8

ブロック図に書き直す

ことができる。このよ

うに表現すると, 制御

や記憶のモデルへの

応用も考えられるが, ここではこれ以上たたら入らない。

$N$  個の要素のインピーダンス  $Z(s)$  は  $N$  次の有理式となる

そして, 分母は  $N$  個の負根を使って因数分解し, 部分分数展開で以下のように一次系の和に直すことができる。

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{Q(s)}{\prod_{i=1}^N (T_i s + 1)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\alpha_i}{T_i s + 1} \right) \end{aligned} \quad (2-36)$$

この  $\alpha_i$  と  $T_i$  をして,  $T_i$  の分布を計算機で調べて, モデル

II と比較してみる。Fig. 2-9 は  $N=20$  について求め

たものである。なお分布密度  $\beta_i$  は  $(T_{i-1} - T_{i+1})$  の逆数

で便宜的に求めたものである。これによると, およそ

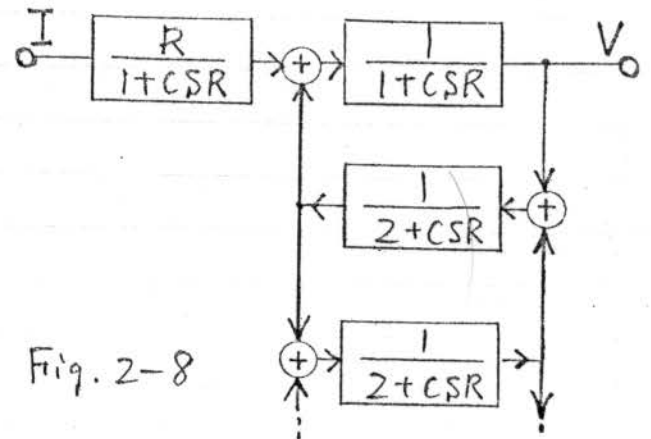


Fig. 2-8

$$\alpha_i \propto T_i \quad (2-37)$$

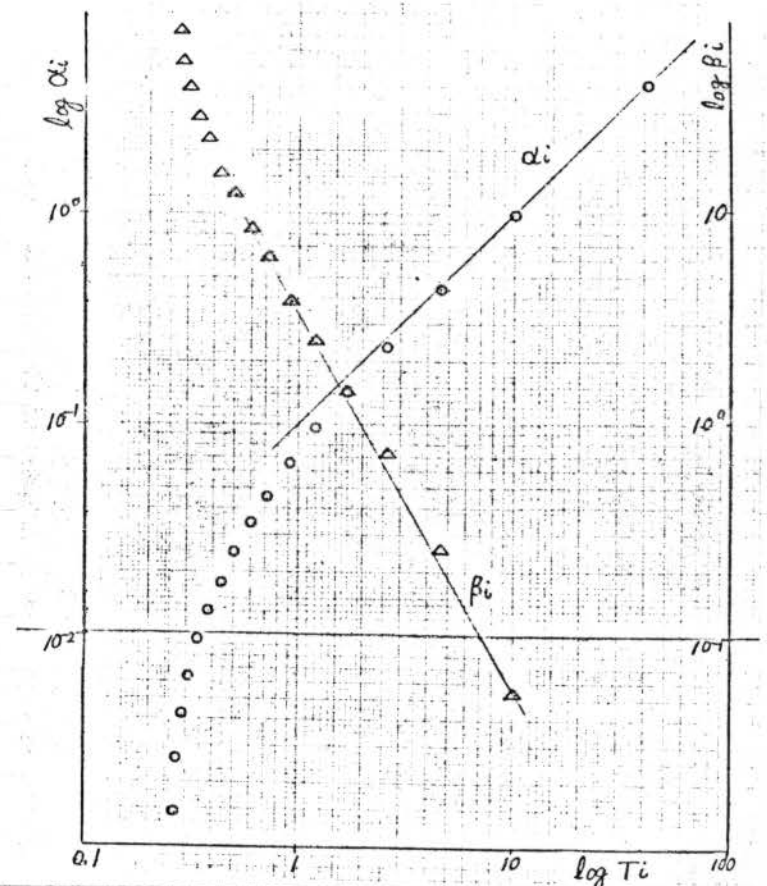
$$\beta_i \propto T_i^{-2} = g(T_i) \quad (2-38)$$

の傾向が認められ (2-36)は積分で以下の近似が可能である。

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &\sim \int_{\varepsilon}^N \frac{T}{Ts+1} d(g^{-1}(T)) \\ &= \int_{\varepsilon}^N \frac{T}{Ts+1} d(T^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^N \frac{1}{Ts+1} \frac{dT}{\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (2-39)$$

で命題 2 の条件  
を満たし、モデル II  
と一致する。

Fig. 2-9





## 第三章 主題

### 1. 音楽の構成と「1/f」ゆらぎ

音楽、特に近代ヨーロッパの音楽、および、それを基礎とする音楽は、強さ、高さともにその変化のパワースペクトルが「1/f」になる傾向を共通に持つことが第1章で確認された。これらの音楽の持つこの傾向はどのような共通の性質と対応しているのかを考察する。

第1章の前提で述べたように、ここで周波数分析した信号には、音色、和音等の情報は含まれていない。またパワーとゼロクロス数はいちおう独立に値を持つにもかかわらず、パワースペクトルは共通の性質を持つ。これらのことから、パワースペクトルが「1/f」になるという性質は、パワーとゼロクロス数に共通な時間の系列の基礎となる、リズムや音楽全体の構成の持つ性質に対応するはずである。

さらにここで、音楽の持つリズムから曲全体にわたる階層的構造に注目し、第2章でとりあげた、時定数が対数の分布で平均されたモデルIと対応することを示す。

まず、モデル I の内容を確認しておく。自己相関関数  $R(\tau)$  で表現される過程とそれぞれ独立に  $R(\tau/2)$ , ...,  $R(\tau/2^n)$  の形の自己相関関数を持つ過程の均等な平均のパワースペクトルは「 $1/f$ 」に近似される。

一方、音楽の構造について解説書や論文 [5], [7], [13] には、共通して以下のような記述がある。対象はヨーロッパ近代音楽である。

- 1) リズムは倍数関係の長さを持つ単位が集まりである。
- 2) 単位は結び合うことで1つだけにはなかった新しいまとまりに達する。
- 3) 2) のようにして、小節が形成され、2倍することで新しい統一が次々に生じ、楽節、楽段を形成し、ソナタ形式やロンド形式に至る。

2) は心理学で言う「ゲシュタルト」の表現であり、3) はシステムの階層構造の表現である。このことを確認する意味で、例として、中学校唱歌の「旅愁」の構造の分析を試みる。

Fig. 3-1の楽符  
から、Fig. 3-2の  
ような階層構造、  
とくに2進木  
(binary tree)の構  
成が判明する。

40. 旅 愁

大 宣 球 演 作 詞  
オードウェイ 作曲  
(アメリカ民謡)

J-116 表情をこめて

一 ふけゆく あきのよ たびのそらの  
二 まどろつ あらしに ゆめもやぶれ

わびしき おもいに ひとりなやむ  
はるけき かなたに こころまよ

こいしや ふるさと なつかしちーちはは  
こいしや ふるさと なつかしちーちはは

ゆめじに たどるは さとのい えじ  
おもいに うかぶは もりのこ ずえ

付録に (Fig. A-26)  
パワースペクトルを載せた。

Fig. 3-1  
「うたのいずみ」 正進社

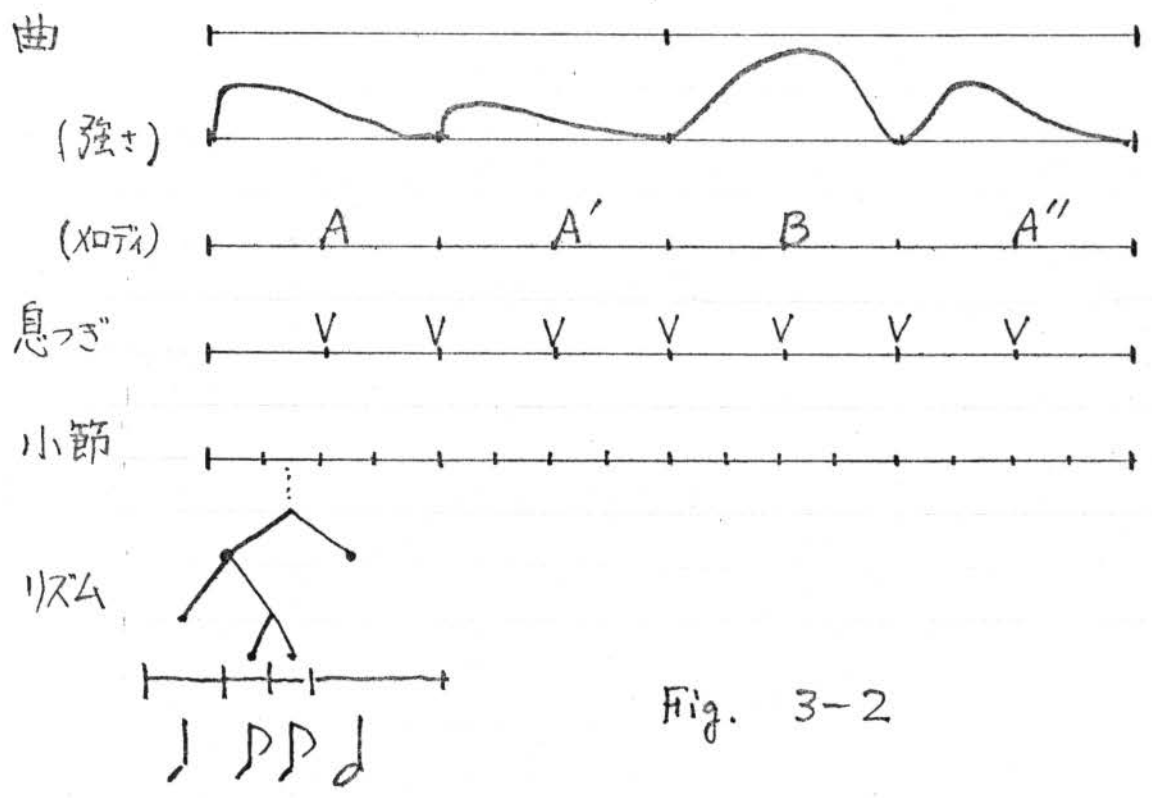


Fig. 3-2

この例では リズムの基本となる 8分音符から、曲全体に至る 8レベルの階層が存在する。ヨーロッパ近代音楽ではさらに高次の階層が数レベル存在するはずである。このような階層の各レベルはそれぞれ時定数を持ち、ほぼ独立に全体の変化に寄与していると考えられる。その寄与率がほぼ平等であるとすれば、時定数は 2 のべき乗程度であるから、モデル I と完全に対応がつく。

ただ、音楽がすべてこのような理想的な構造になっているとはとても思えず、どの程度ずれているかというのわからない。ただ、階層的に 2 のべき乗の時定数が適当に寄与している程度の近似は本質的であると考ええる。

パワースペクトルが低域で平坦となるのは高次の時定数の寄与があまりないせいであろう。(Fig. A-4, 5)

低域で平坦、高域で傾斜が大きくなるのは階層のレベル数の少ない短い曲に見られる。(Fig. A-11, 14, 15)  
雅楽や、謡曲等は質的に構造が異なっていると見ることが出来る。

## 2. 音楽の構造と人間

ヨーロッパの近代音楽がリズムから始まる階層構造を成すことは、ヨーロッパの文化史上にその原因を求めるときであろうか。もちろん、文化の要素、とくに楽器や楽符の影響は否定できないが、もっと根本的に人間の音、音の系列に対する情報処理様式が原因ではないだろうか。音の持続を音符と認識し、弁別する能力、その系列を全体として把握する機構等が音楽の洗練された構造を規定したと考える。

確かに、日本の民謡の中にも小節のないものがあり、近代音楽の基礎となった中世ヨーロッパの音楽はほとんど定量リズムを持たないなど、近代音楽の構造を持たない音楽の例はいくらでもある。しかし、これらの音楽は純粹の音そのものの芸術ではない面（宗教、言語）があり、基本的にひとりで歌ったり、演奏したり、あるいはせいぜい斉唱である。純粹な音だけで最大限の創造的表現を追求した近代の音楽の持つ、大人数、多くの楽器、

多くの旋律の構成と比較すると、構造の異なる音楽は、いずれも単純で、幼稚である。

次節で扱う人間の能力の範囲内で、人間の情報処理機構に適した形で、最大限の音の系列の表現をしようとする時、倍数系列のリズムをもち、階層的な構造をもつのが合理的なのである。このような解釈は、分析の困難なジャズの即興曲のパワースペクトルが近代のオーケストラの曲と同じく「1/f」に近いという事実の、ひとつの説明となる。

### 3. 人間の情報処理能力

この節では人間の単独な音の長さに対する弁別能力が低いこと、音楽を理解するためにまとまりを作って、無意識ながら、階層を理解の構造として持つことを示す。

音の長さに対する弁別能力は古くから調べられており、音楽のリズムに関係する 0.2 ~ 2.0 秒については、基準の長さの一定割合違えば判別できるという、フェヒナー

の法則があてはまる。

(Fig. 3-3)

また、同じ基準音で  
何度も長短を比較し

たとき約10%の変

化が弁別でき、1回

限りの判断では約

20%の変化が弁別

できることを示している。実際の音楽ではこれらの実験

と違い、次々と長さの違った音が入力される状況で判断

する必要がある。そこで、(Fig. 3-5)のような

4種の刺激音系列を作り、Sに対するCの長さを判断さ

せて、弁別閾を求めた。(Fig. 3-4) (a)~(d)は

(Fig. 3-5)の(a)~(d)に対応し、バーはSに対して、C

が長い短いを判断できない(75%以下正答)区間であ

る。バーは個人ごとで、弁別閾は個人差もあるが、20%

を越えることもあることが判明した。

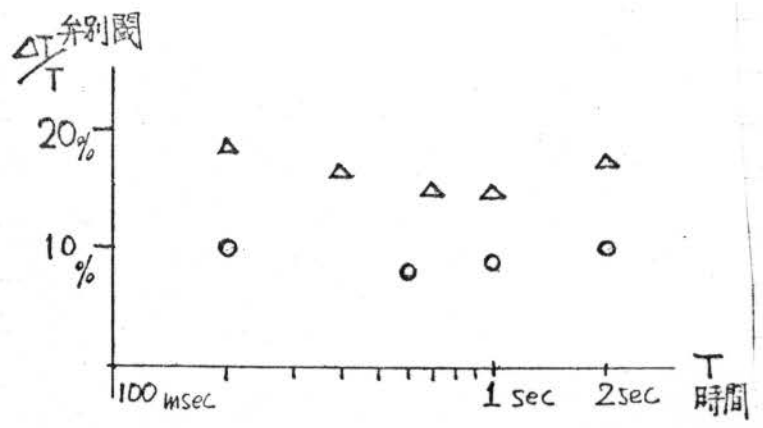


Fig. 3-3

○ 同じ刺激 50回  
△ 〃 1回

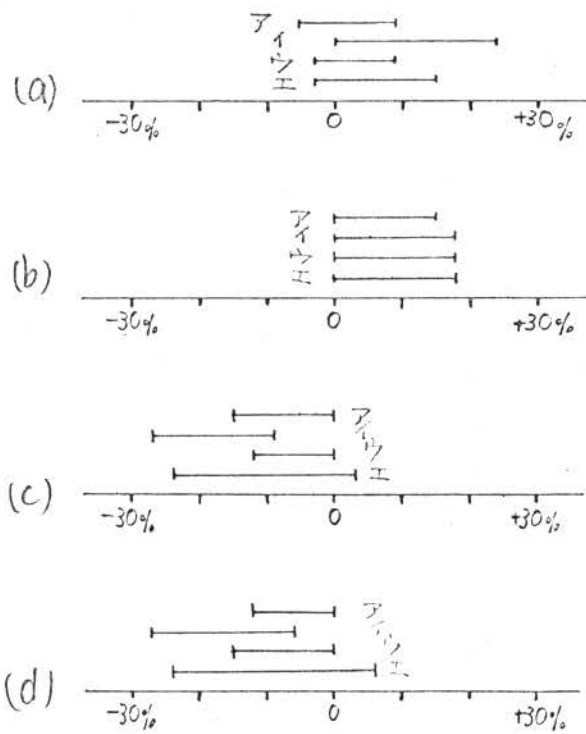


Fig. 3-4

音の長さの弁別実験の結果

基準音 S に対する  
比較音 C の長さの  
「等しい」と思える区間  
を示す。  
ア~エは被験者名

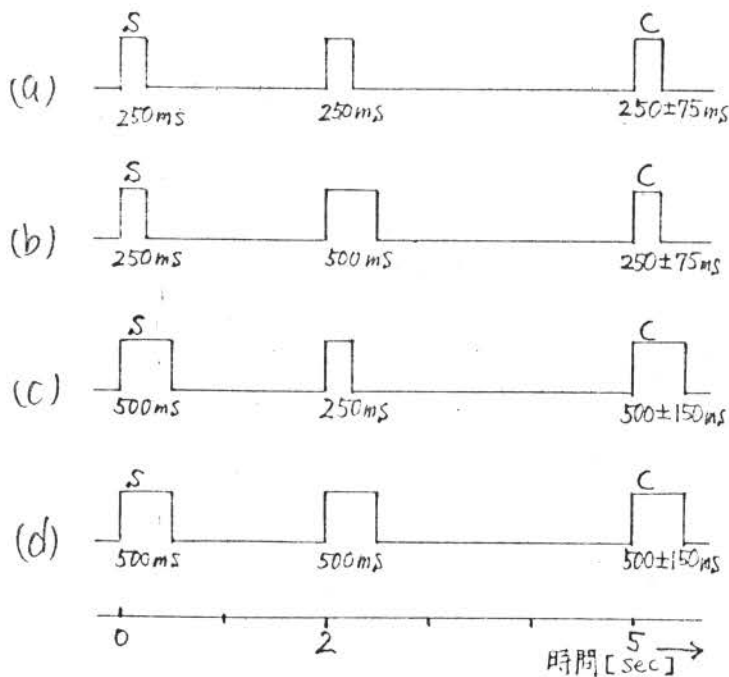


Fig. 3-5

音の長さの弁別実験  
の音系列



また、L. Higgins [7] は専門家にオルガンを演奏してもらって、そのタッチの時刻を10msec単位で計測して、それから楽符を再構成する試みをしている。その時刻のデータともとの楽符の例が発表されていたので、本来の音符の長さとは演奏の長さを比較してみた。ここでも、±10%の誤差は普通で、20%を越えるものも見つかった。

以上のような事実から、リズムの単位となる音の長さには、演奏にも鑑賞にも20%程度以内のあいまいさが残る。符号として音符が区別できるために、少なくとも50%、普通2倍、 $1/2$ 倍の長さの系列でなくてはならないはずである。ヨーロッパでの初期の定量リズムが3:1の長短2種であったことも人間の特性が規定していたと思われる。現代のモールス符号も3:1である。

人間の時間の長さに対する感度が鈍いことを補うかのように個々の音としてでなくまとまりを持って理解したり、覚えたりする能力がある。個々のもたない性質を統一することで得るといふ「ゲシタルト」の典型例である。

リズムの系列を覚えようとする時、必ず小節の構造を仮定しながら、それを頼りにしていることがわかる。また音の高さ(ピッチ)の認識や記憶の研究が D. Deutsch によってなされ、その中で「メロディをまとめて(個々の音としてでなく)聞く事実が紹介されていた。【5】

左右から別々に高さの違う独立なメロディを聞かせると、左右のどちらか都合のよい音を連らねてなじみのメロディにして理解してしまうということは自作の音楽合成器を使って確認することができた。このようにまとまりとして理解する人間の能力は階層的構造を容易に構成し、理解する基礎となっている。

#### 4. 展望

これまでの節で述べた音楽と人間の系の推測は、音楽の一面を捉えた信号の周波数分析や、モデルが基礎で、これだけで柱的な芸術や複雑な人間のことが語り尽くせるとはとても考えられない。しかしながら、計測、制御技術

で蓄積された信号処理技術やマイクロコンピュータをこの方面の研究にもっと本格的に応用すれば、芸術と人間の関係についていろいろなことがわかるようになるであろう。そして工学と芸術が互いに啓発し合うことは大いに予想される。

このことに関し、Voss et al. [2] による音程と音符と「 $\sqrt{f}$ 」雑音で選択する自動作曲法を提案している。(Fig. 3-6) しかし、音符の長さを等しくしないとこの曲の高さの変化は「 $\sqrt{f}$ 」とならない。またこの章で考察している、音楽の構造や人間の

能力に照らし

てみれば、

明らかに意味

のないう操作

と言える。



1/f music

(Fig. 3-6)

## 要約と結論

音楽の信号から、曲の流れ情報を抽出する意味で、20Hz以下の平均パワーとゼロクロス数を周波数分析すると、近代の洗練された音楽では、パワースペクトルが周波数に反比例する傾向が共通して見い出されることが確かめられた。短い曲や原始的音楽では少しはずれ、言語ではかなり異なることもわかった。

このパワースペクトルが「 $1/f$ 」となる性質は、多様な時定数を持つ系の重ね合わせの構造を持つモデルで近似されることがわかった。

そして近似モデルが、近代音楽の持つリズムの構成から小節、楽節、全曲に至るまでの階層構造とよく対応していることが示せた。また、こうした音楽の構造は、人間の音の長さの弁別能力の制約と、まとまりを作って、認識する性質と対応づけられることが推測された。

# 謝 辞

2年間にわたり、私の研究に対し、絶えず 助言や 激励をくださった 南雲仁一教授、吉沢修治助教授、中野 馨講師に深く感謝いたします。第一講座の甘利俊一助教授本年度内地研究員として 来られた お茶の水女子大 心理学の須賀哲夫助教授にも貴重な御意見をいただき 深く感謝いたします。研究室の西村さん、馬被さんの両助手には テーマ、音楽、数学等について相談にのっていただき、適切な批判、助言をいただいた。私が「ブランデンブルク協奏曲のことを知りたいな」とつぶやくと「録音テープを貸してあげよう。」とおっしゃったのは西村さん。「スコアを貸してやるゾ。」とおっしゃったのが馬被さんで「あったことは印象深い。研究室の後輩である、古谷、柳田、依田の3君はともに楽器をこなし、音楽に対する意見をもっており、また被験者として、録音テープの提供者として世話になった。研究生で三菱電機の大須賀さんには「1/f」や音楽についての文献を提供してもらった。そして、最後になったが、データ採集、処理、心理実験の強力な武器と

なった フロッピーディスク付インテリジエント端末のハードウェアを設計、製作してくださった石川正俊さん、そのOSやアセンブラ等のソフトウェアを作ってくださった芹沢照生さん、両先輩の献身的な努力に敬意を表します。

## 参考文献

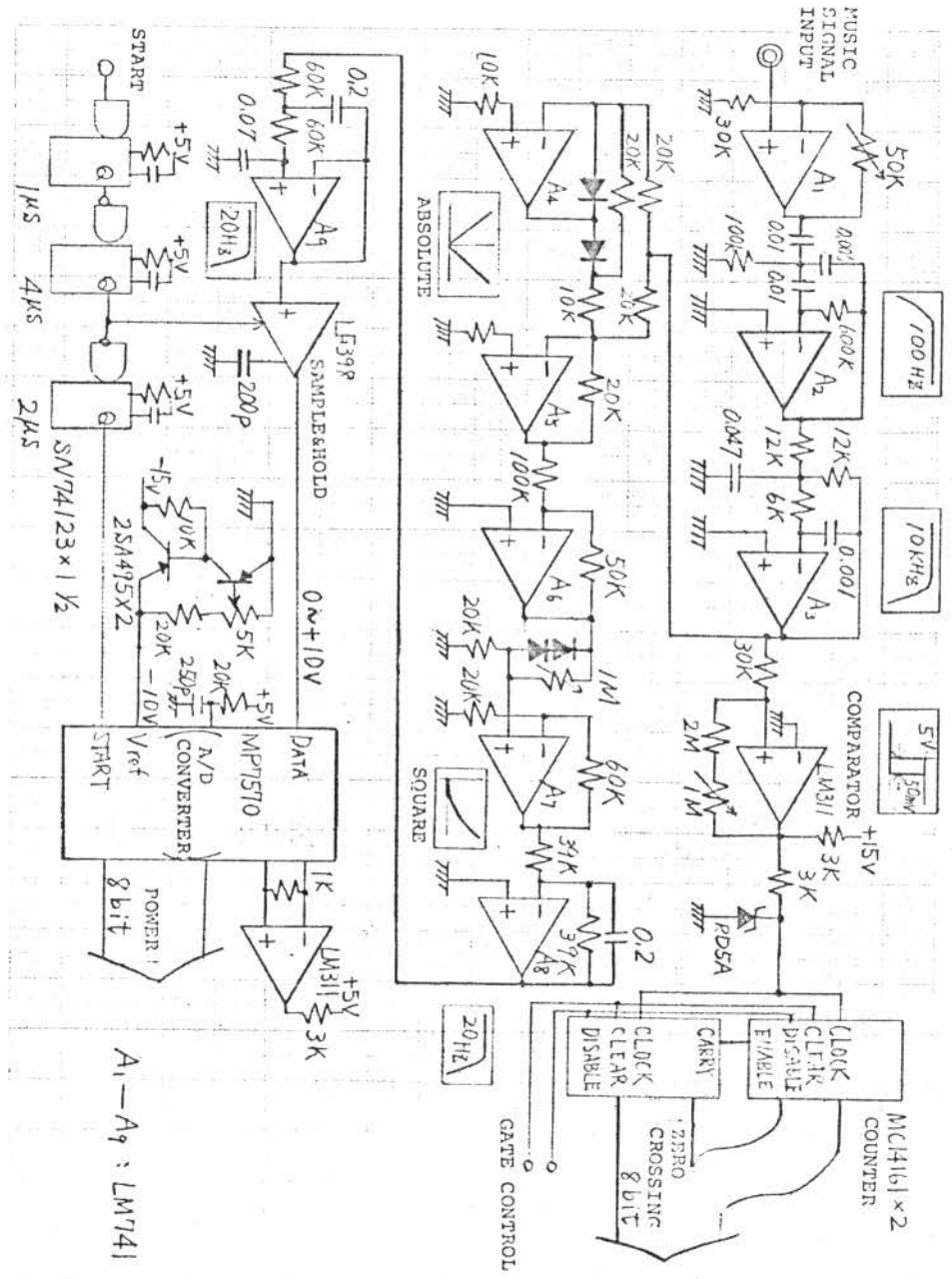
- [1] Voss, R.F, Clarke.J. (1975). " '1/f noise' in music and speech." *Nature*, Vol. **258** pp. 317-318.
- [2] Voss, R.F, Clarke.J. (1978). " '1/f noise' in music: Music from 1/f noise." *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. **63** No. 1, pp. 258-263.
- [3] マーチン, ガードナー (1978). "数学ゲーム" サイエンス 6月号 pp. 115-126.
- [4] 武者利光 (1977). "1/f ゆらぎ". *応用物理* 第46巻 第12号 pp. 1144-1155.
- [5] Deutsch, D (1977). "Memory and Attention in Music." *Music and the Brain*, William Heinemann Medical Books Ltd. London. pp. 95-130.
- [6] Stott, L.H. (1935) "Time-order errors in the discrimination of short tonal durations." *J. Exp. Psychol.*, **18**, pp. 741-766

- [7] Higgins, H.C.L. (1979) "The perception of music."  
Proc. Royal Soc. London. Vol. 205. B. pp. 307-  
322.
- [8] Proceedings of the Symposium on  $1/f$  Fluc-  
tuations. (1977)
- [9] ホール, フレス (1971) 「時間知覚」 現代心理学 VI  
白水社, 東京 pp. 93-142
- [10] 境 久雄 (1978) 「聴覚と音響心理」 音響工学講  
座, コロナ社
- [11] マックス, ウェーバー 「音楽社会学」 安藤, 池宮, 角倉 訳  
創文社. (1967)
- [12] 日野 幹雄 「スペクトル解析」 朝倉書店 (1977)
- [13] 山根 銀二 「音楽美入門」 岩波新書 (1950, 76)
- 小倉 朗 「日本の耳」 岩波新書 (1977)
- 別宮 貞徳 「日本語のリズム」 講談社現代新書 (1977)



# 付録

信号処理回路図	Fig. A-1	41
音楽のパワースペクトル	Fig. A-2 ~ Fig. A-20	42
心理量への変換	Fig. A-21 ~ Fig. A-22	61
度数分布	Fig. A-23 ~ Fig. A-24	62
モデルのパワースペクトル	Fig. A-25 ~ Fig. A-26	65
モデルの計算	A-1 ~ A-18	66



A1-A9: LM741

Fig. A-1

音楽の信号をパワーとゼロクロス数の形で  
計算機に送るための信号処理装置図

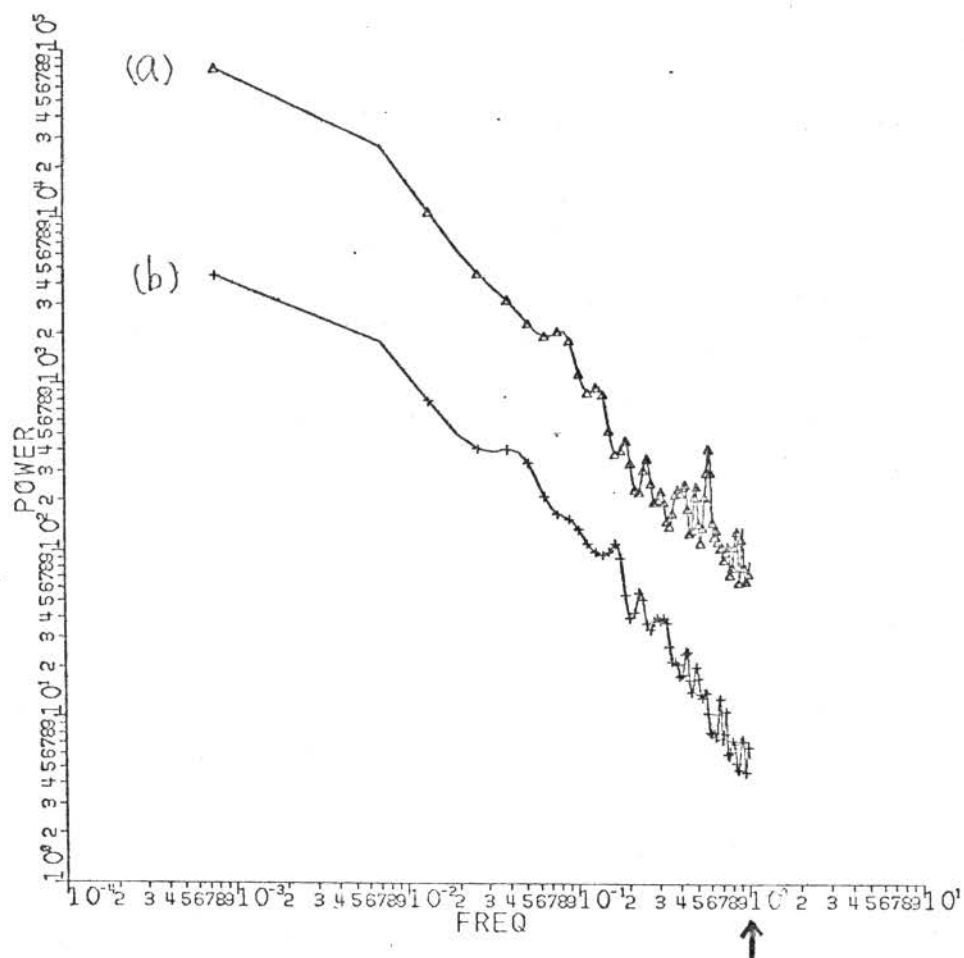


Fig. A-2

バッハ：ブランデンブルク協奏曲 1番 (低域)

オーケストラ

	推定次数	データ数
(a) パワー	41	2576
(b) ゼロクロス	42	2576

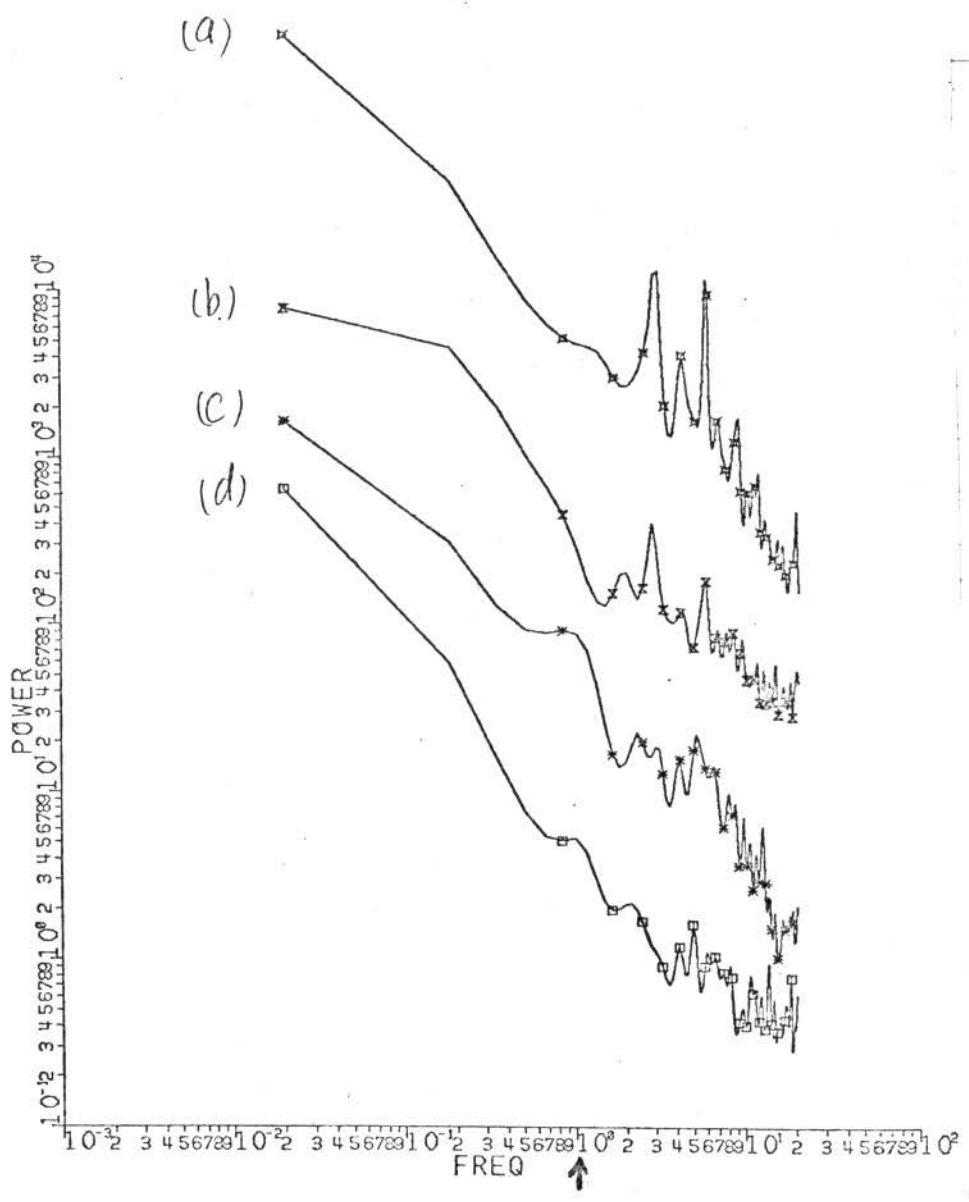


Fig. A-3

バッハ: ブランデシュブルフ 協奏曲 1番 (高域)

オーケストラ

	推定次数	デジ数
(a) 第1楽章パワー (部分)	49	2000
(b) " ゼロクロス (")	51	2000
(c) 第2楽章パワー (")	50	2000
(d) " ゼロクロス (")	52	2000

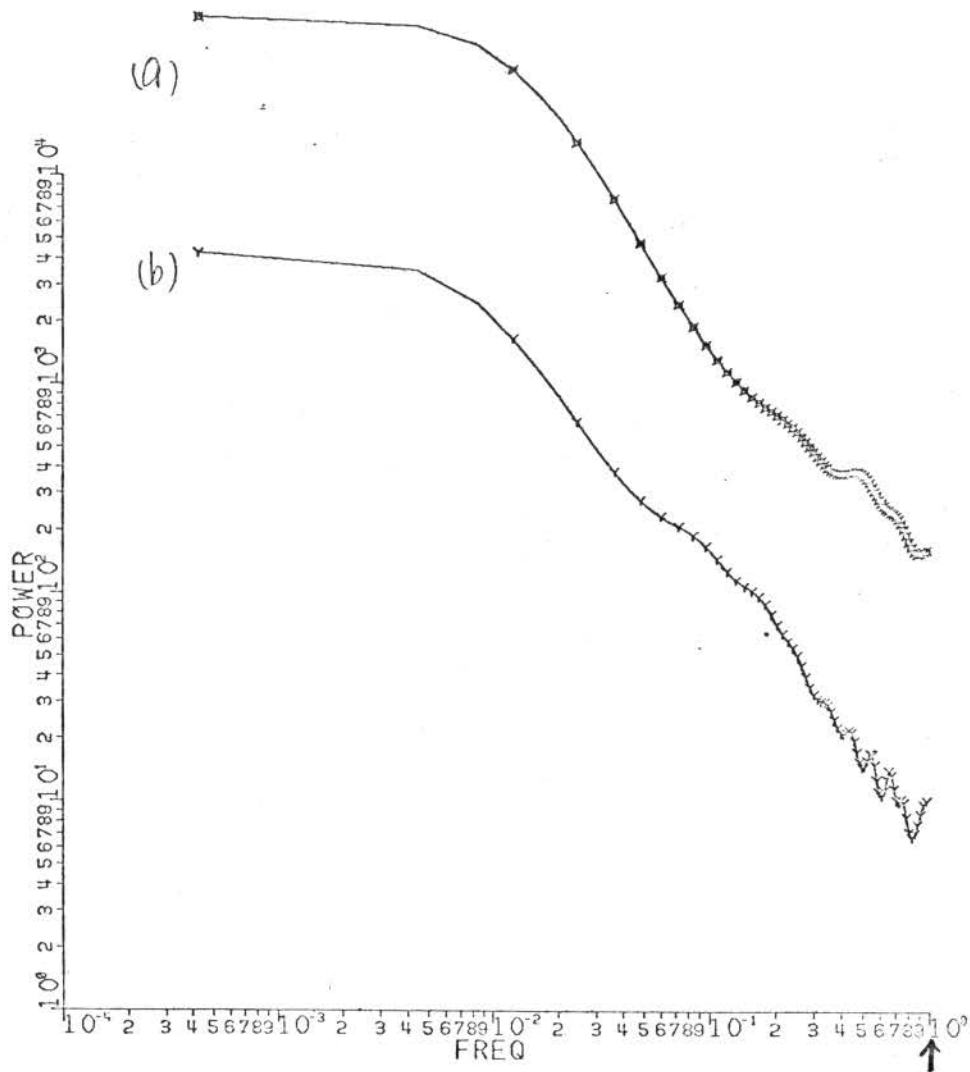


Fig. A-4

ベートーヴェン：ピアノ協奏曲「皇帝」

オーケストラ

	推定次数	データ数
(a) パワー	22	4672
(b) エンベロープ	23	4672

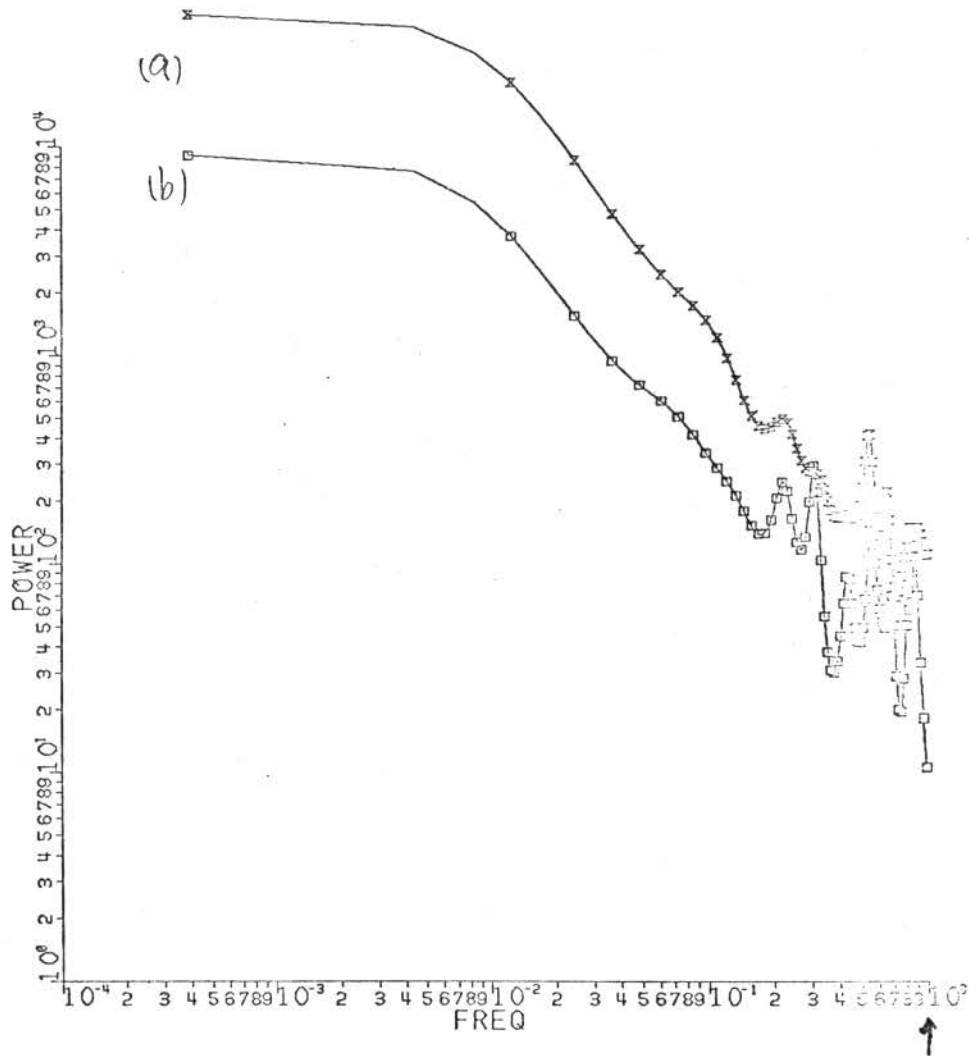


Fig. A-5

ドボルザフ: 交響曲「新世界より」

オーケストラ

	推定次数	データ数
(a) パワー	25	5120
(b) センソ	26	5120

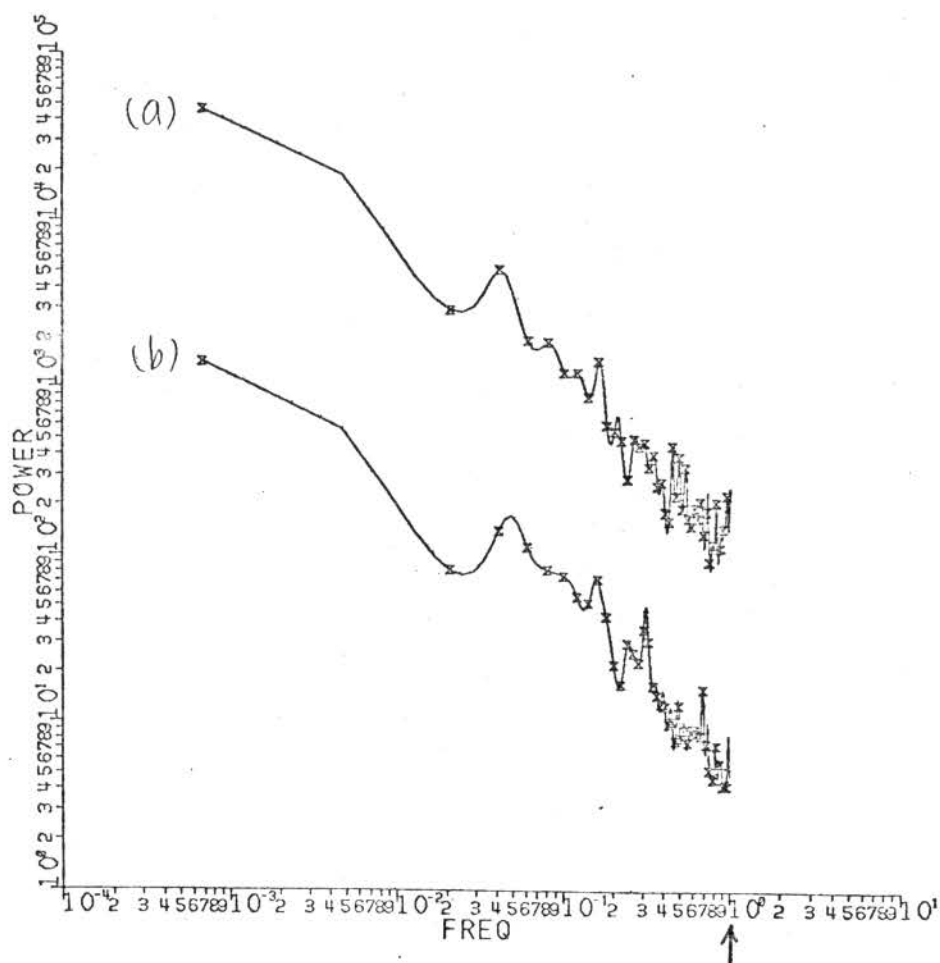


Fig. A-6

モーツァルト: ピアノ ソナタ K331

ピアノ 独奏

	推定次数	データ数
(a) ハーフ	51	2944
(b) エロク로스	51	2944

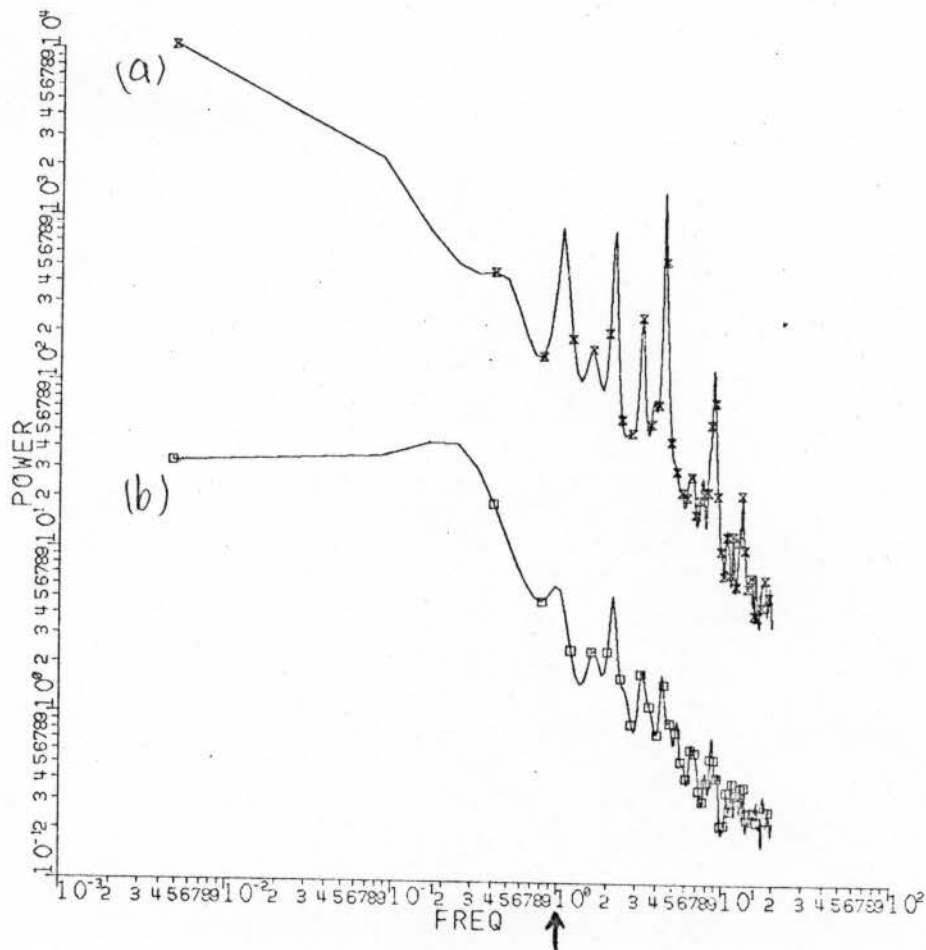


Fig. A-7

E-ツァルト: トルコ 行進曲

ピアノ独奏

	推定次数	フーリエ数
(a) パワー	90	8400
(b) エロワロス	91	8400



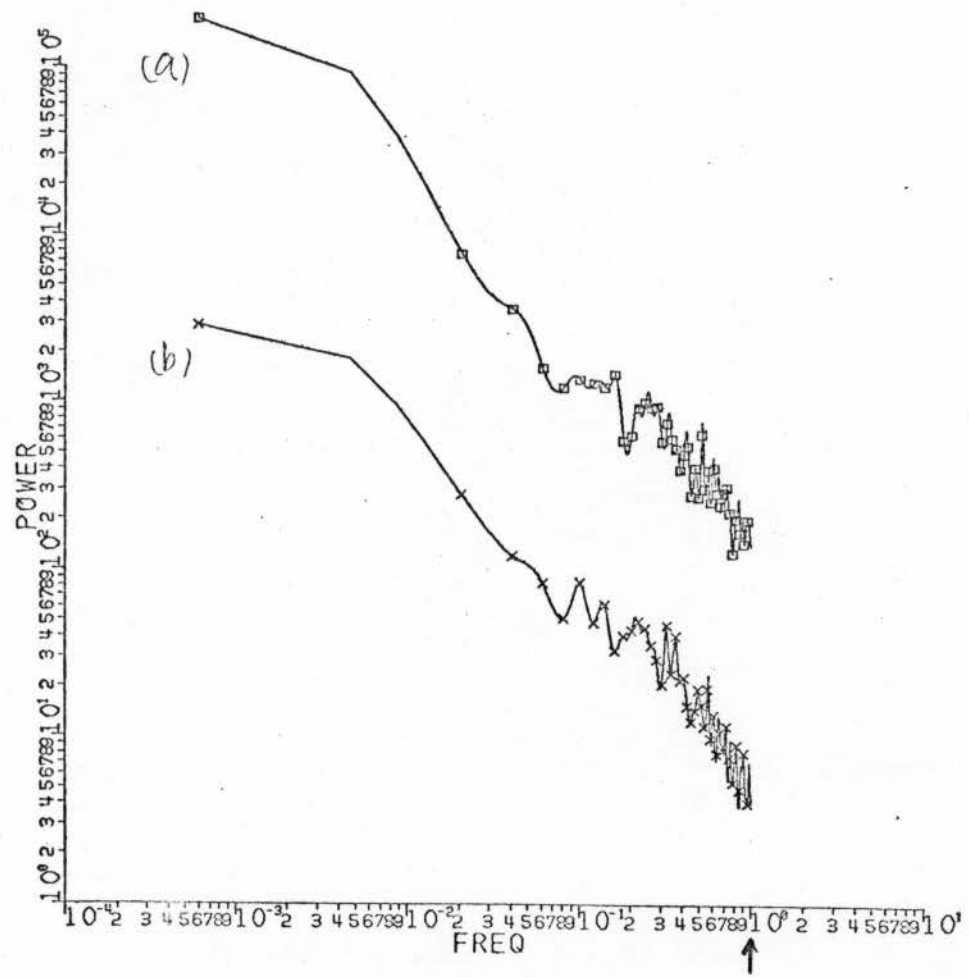


Fig. A-8

キース・ジャレット: 即興曲 (ジャズ)

ピアノ独奏

	推定次数	デー々数
(a) パワ-	52	3360
(b) ゼロロス	56	3360

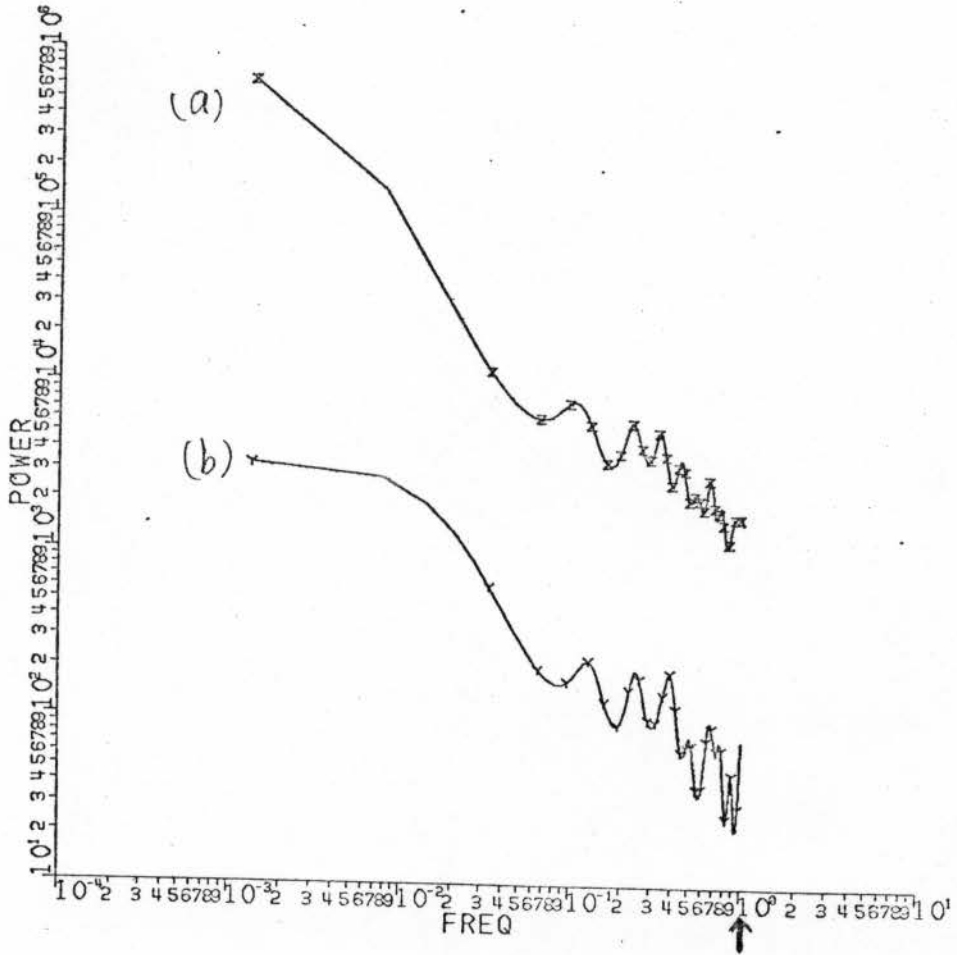


Fig. A-9

ジャズ 即興曲

ピアノ, ドラム, 木管

	推定次数	データ数
(a) パワー	21	1488
(b) セロロス	22	1488

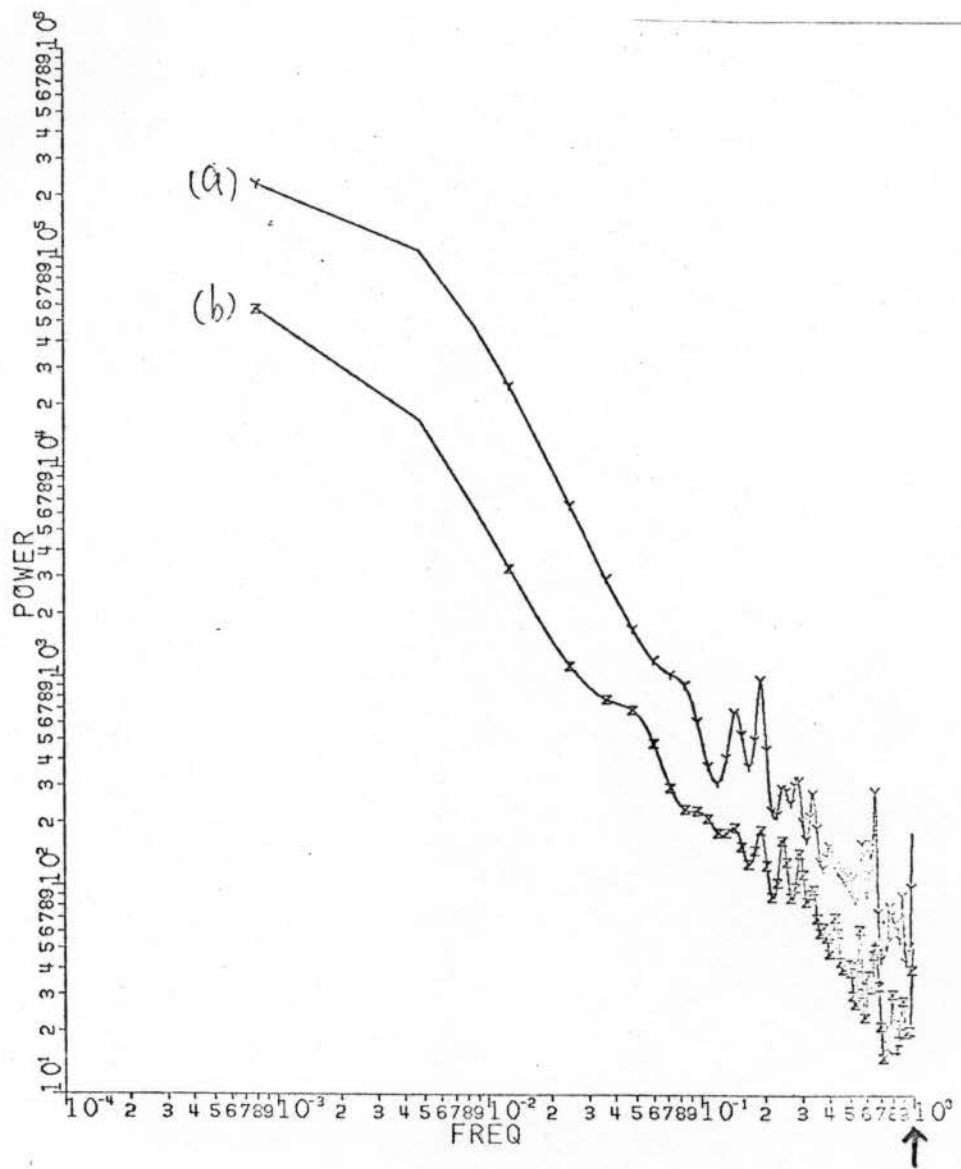


Fig. A-10

キンクアムツン：ロック

	推定次数	データ数
(a) パワー	47	2464
(b) センサ	48	2464

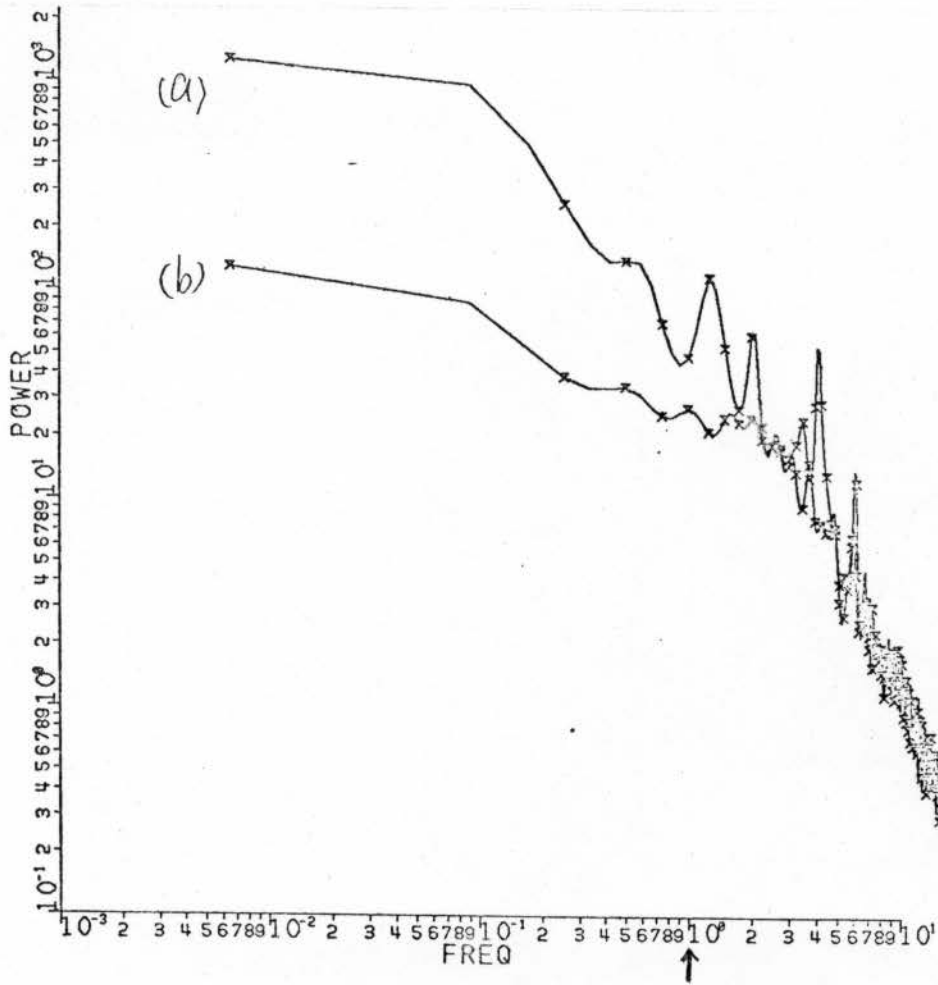


Fig. A-11

加藤登紀子

ギター・歌

	推定次数	テ-7数
(a) パー	85	6208
(b) ゼロ70ス	85	6208

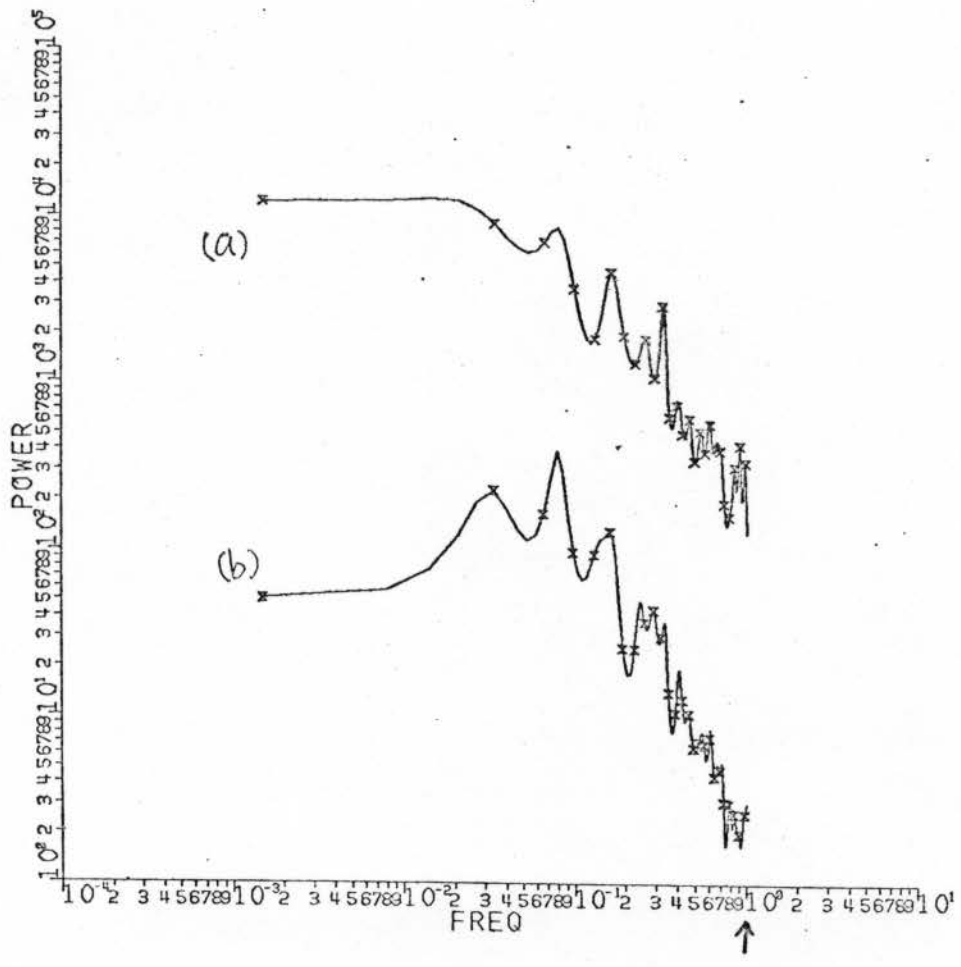


Fig. A-12

グレゴリウス 聖歌 (低域)  
女性斉唱

	推定次数	F <sub>0</sub> -7数
(a) ハ <sup>0</sup> 7-	33	1328
(b) セ <sup>0</sup> 707	38	1328

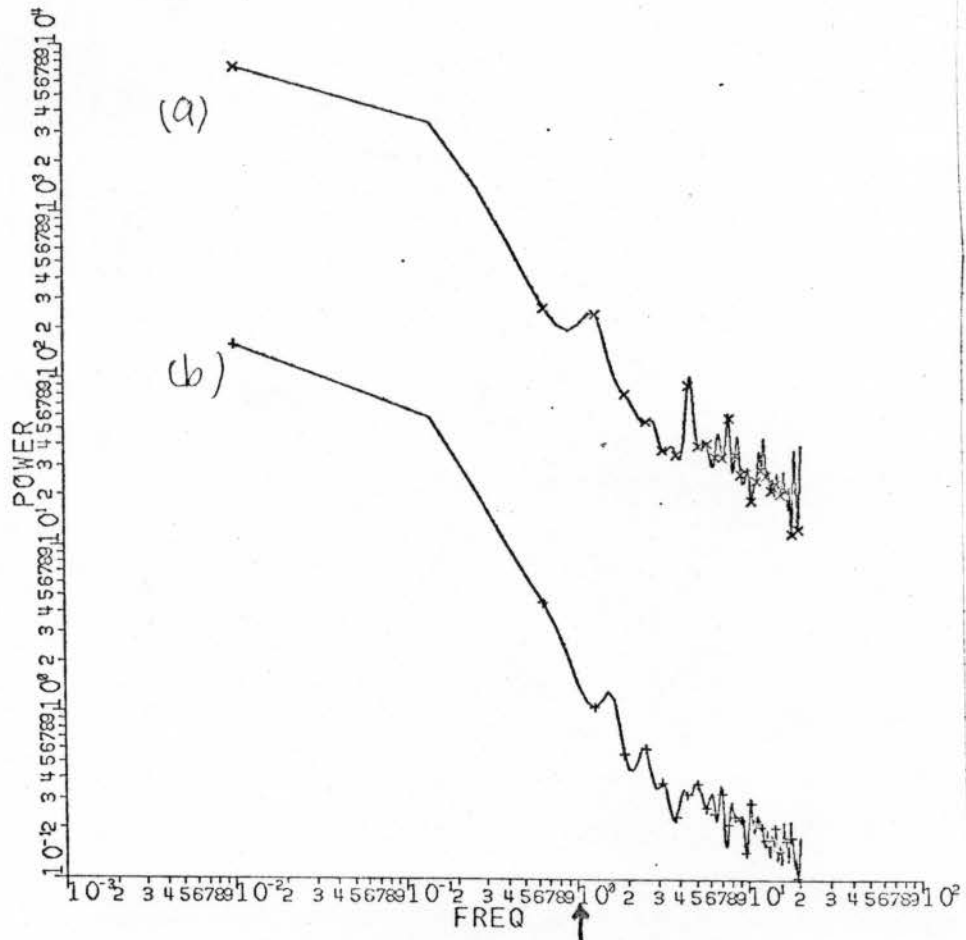


Fig. A-13

グレゴリウス聖歌 (高域)

女性斉唱

	推定次数	データ数
(a) パワー	56	3968
(b) セロロス	55	3968

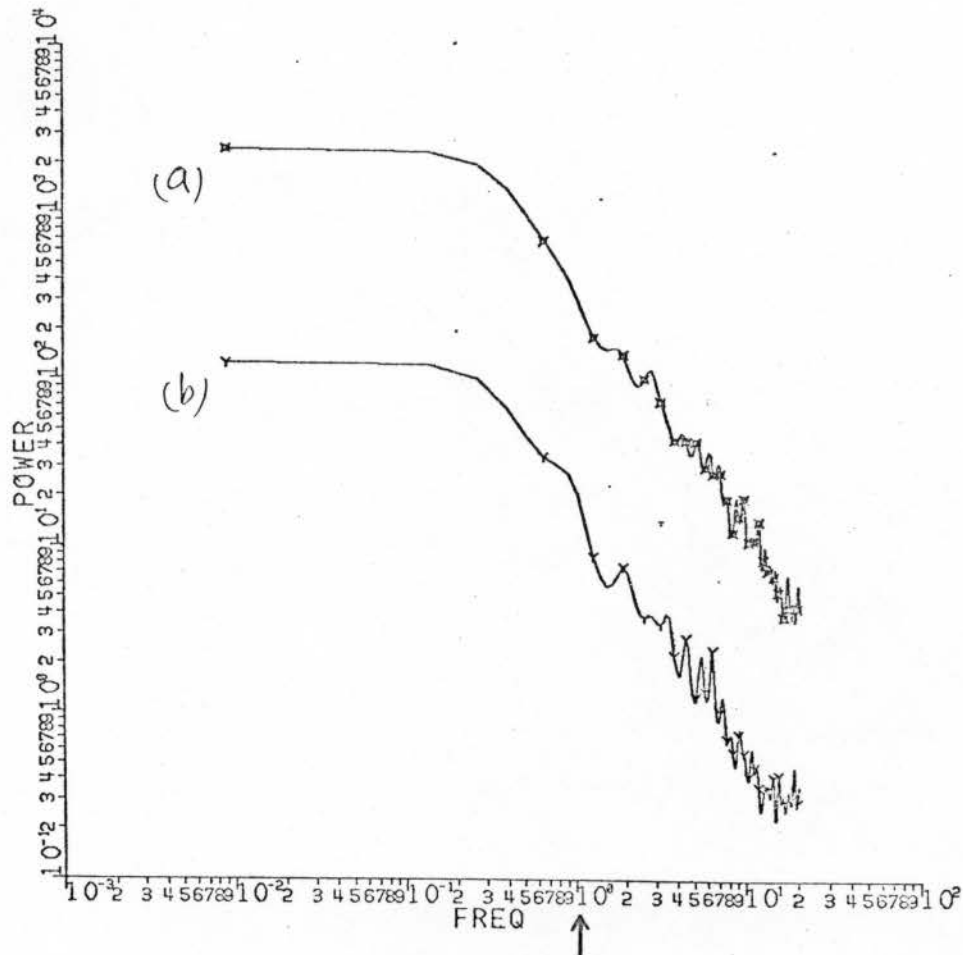


Fig. A-14

小諸馬子唄

男声

	推定次数	テ-7数
(a) パ7-	48	4486
(b) ㇇70㇚	48	4486

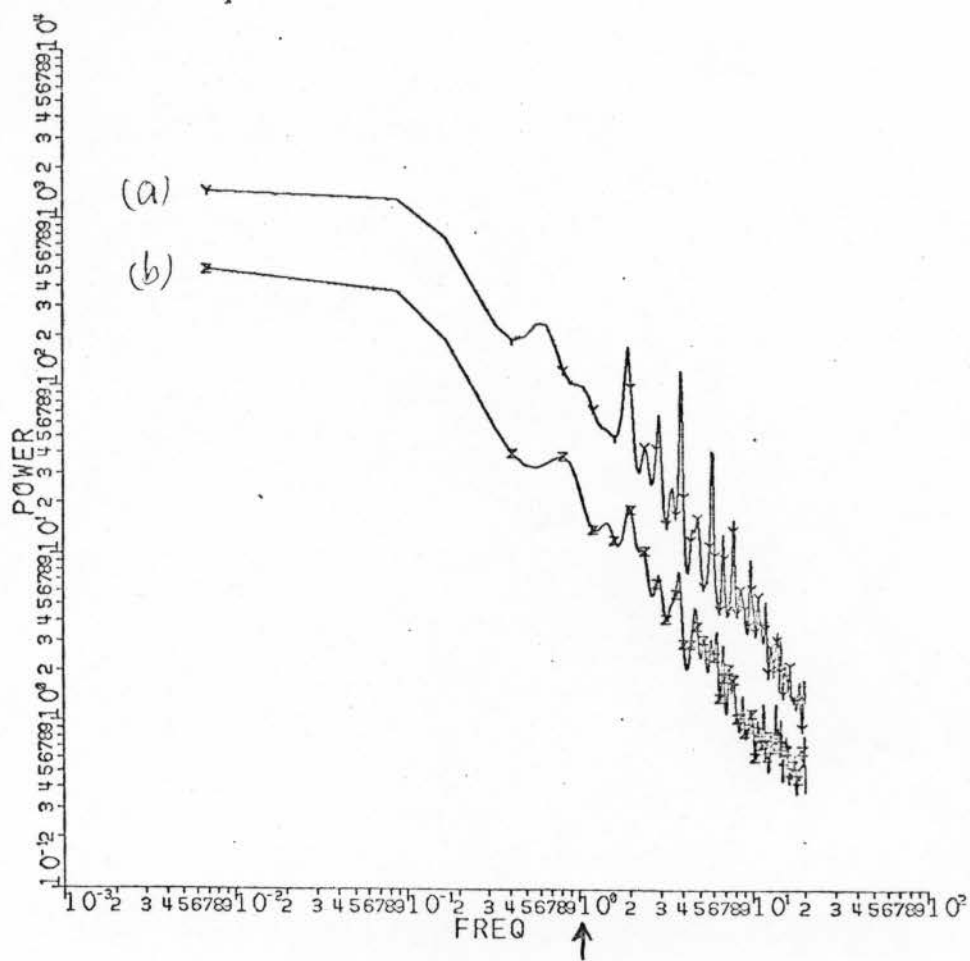


Fig. A-15

南部牛追唄

男声

	推定次数	テ-7数
(a) パ7-	61	5760
(b) 口70ス	64	5760



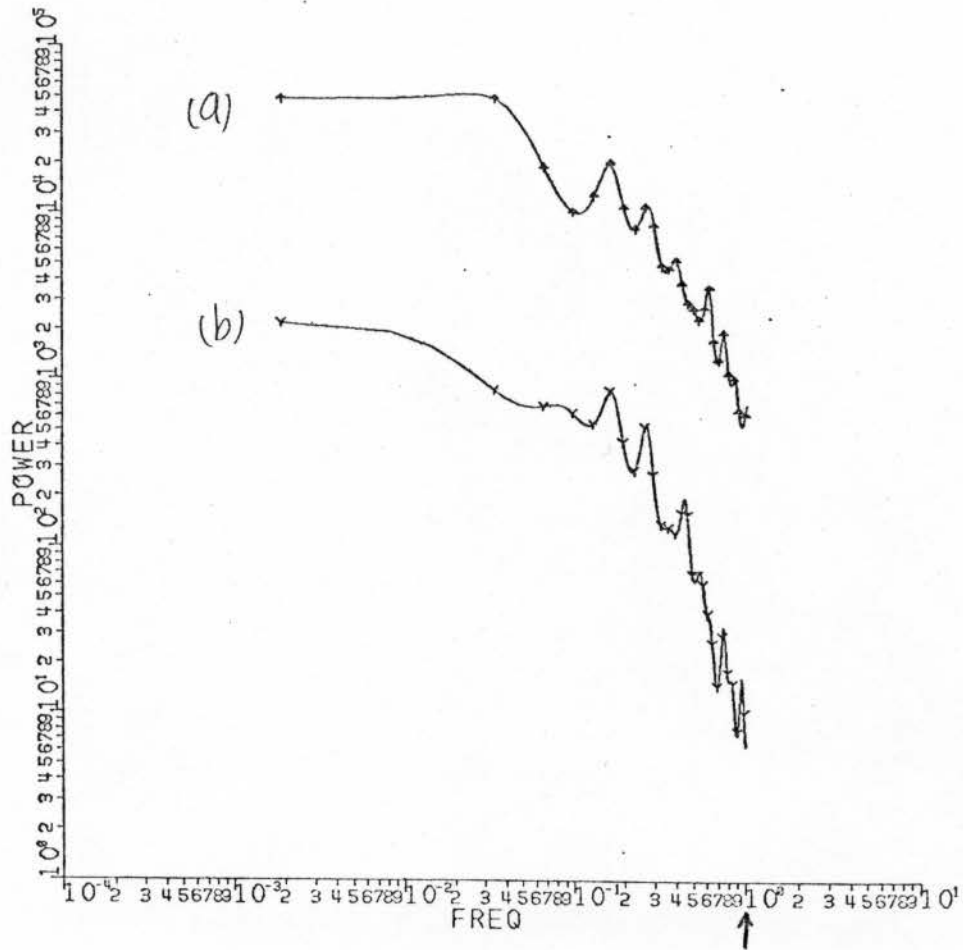


Fig. A-16

雅楽「越天楽」

笙, ひちりき, 太鼓, 鉦鼓 等

	推定次数	デ-7数
(a) パワー	18	1056
(b) エロクロス	22	1056

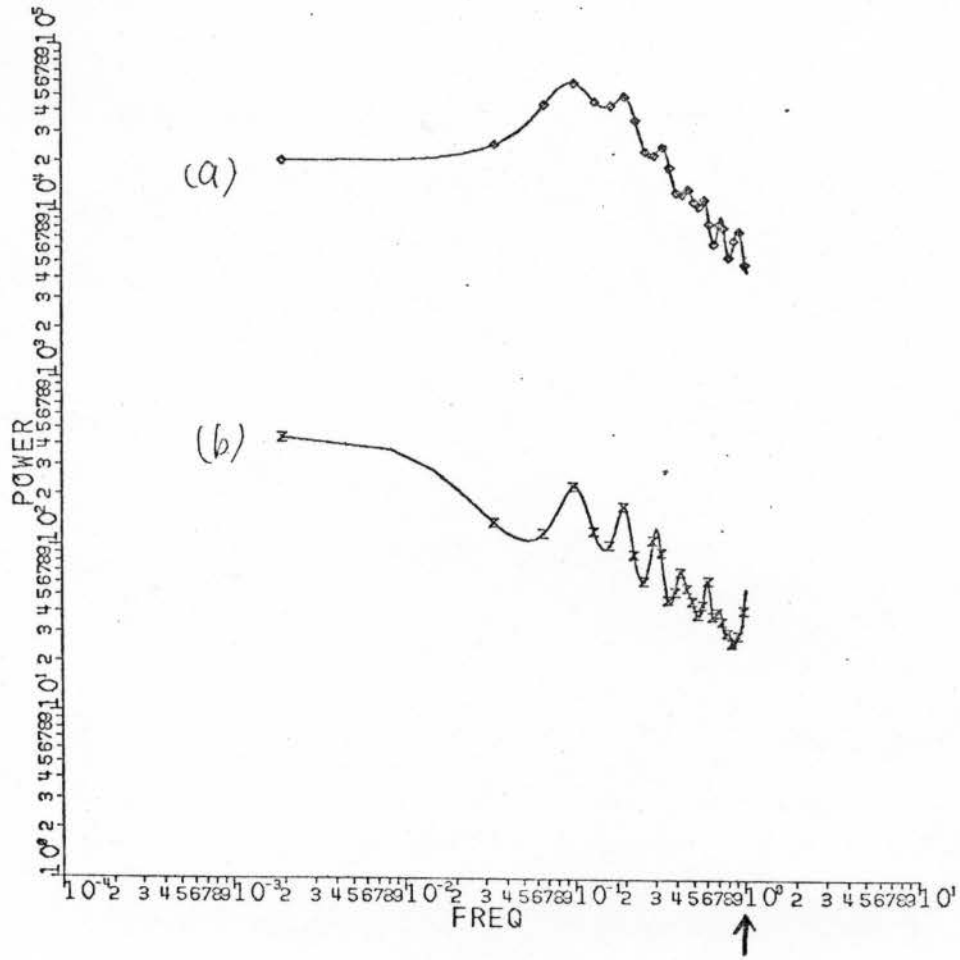


Fig. A-17

能 謡曲 観世流「巴」

	推定次数	デーブ数
(a) パワー	18	1024
(b) ゼロクロス	21	1024

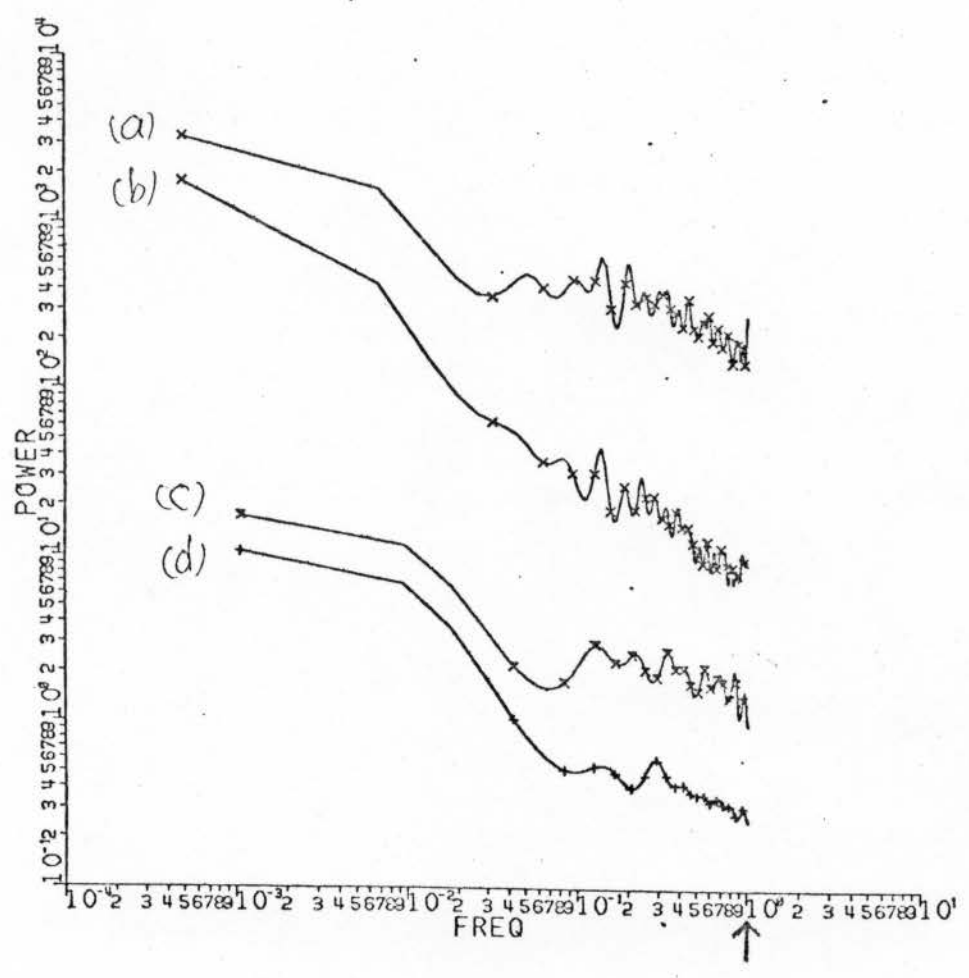


Fig. A-18

ニュース (低域)

	推定次数	データ数
(a) 英語=ニュース パワ-	43	4096
(b) " ゼロドス	43	4096
(c) 日本語=ニュース パワ-	20	2000
(d) " ゼロドス	16	2000

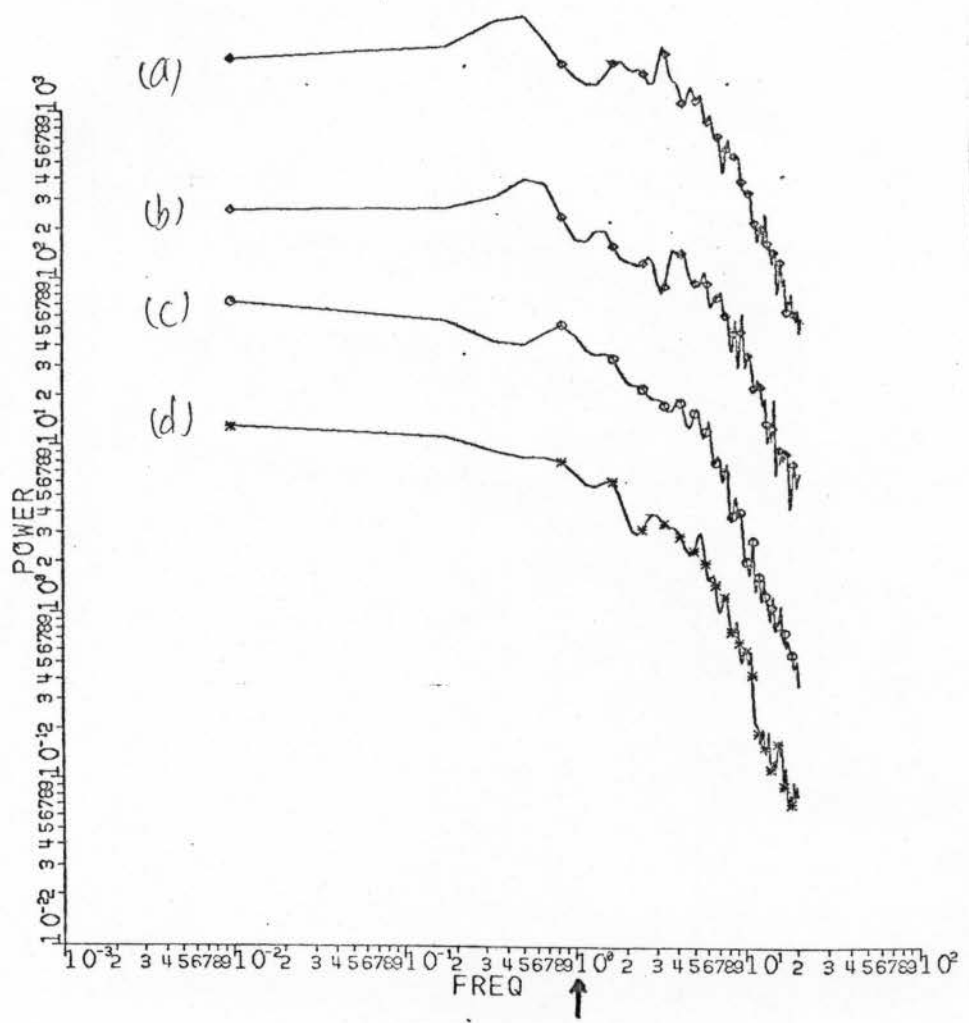


Fig. A-19

ニュース (高域)

		推定次数	データ数
(a)	英語ニュース パワ	57	4080
(b)	" セロノズ	57	4080
(c)	日本語ニュース パワ	53	4080
(d)	" セロノズ	50	4080

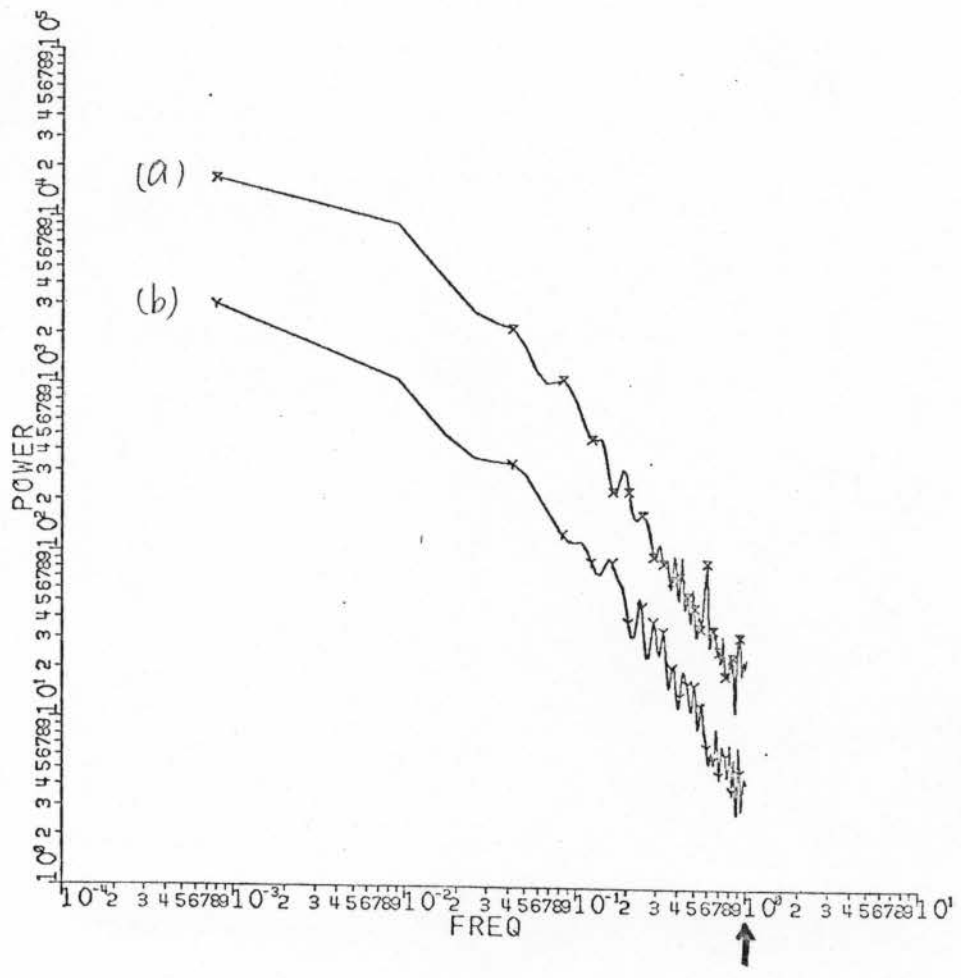


Fig. A-20

バッハ：ブランデンブルク協奏曲 第1番

物理量であるもののデータを心理量  
に変換した値を使った。

	推定次数	データ数
(a) パワ-	59	2576
(b) エロゾ	48	2576

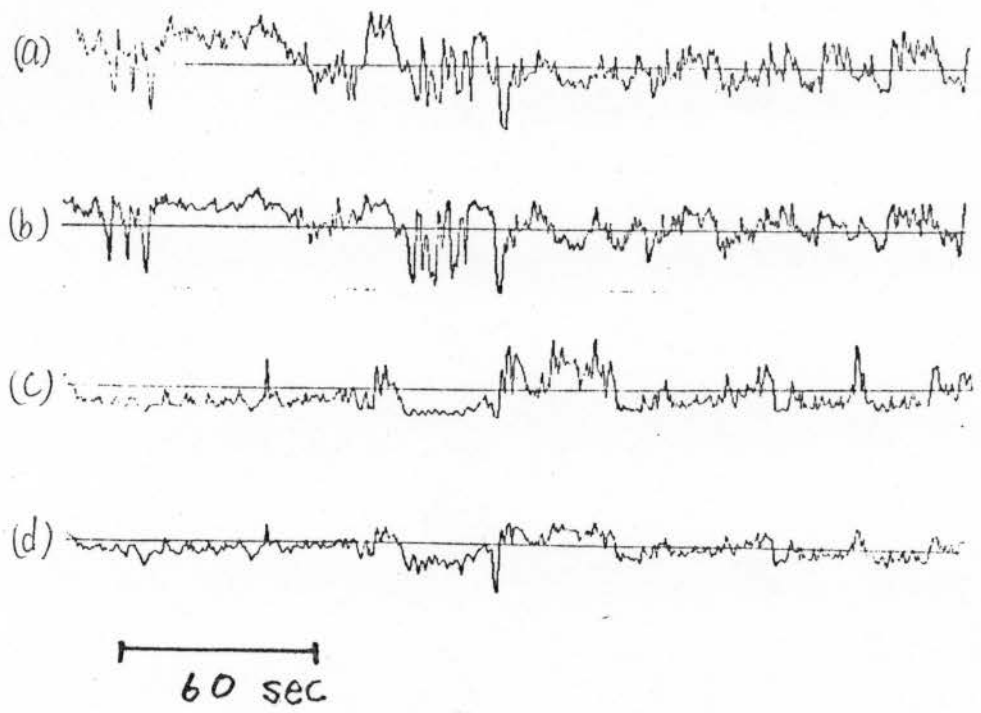
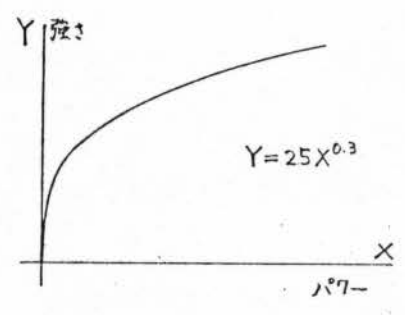


Fig. A-21 ↑

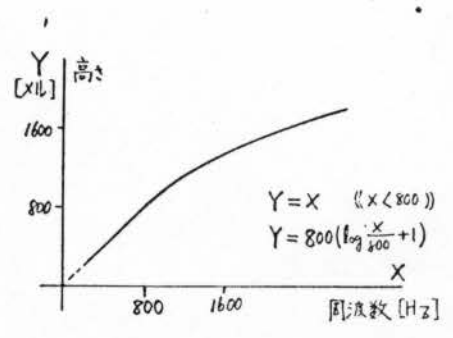
- (a) パワー X (物理量)
- (b) " Y (心理量)
- (c) セロフス数 X (物理量)
- (d) " Y (心理量)



ブランデンブルフ協奏曲からの  
採集波形例

Fig. A-22 →

物理量-心理量変換



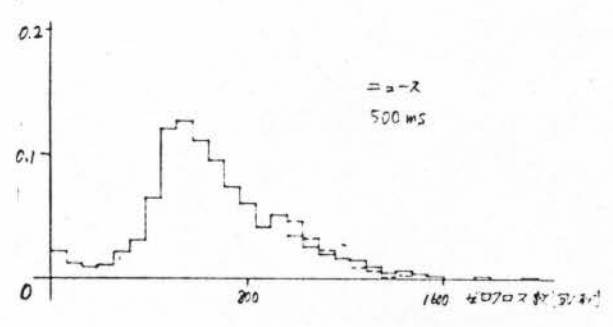
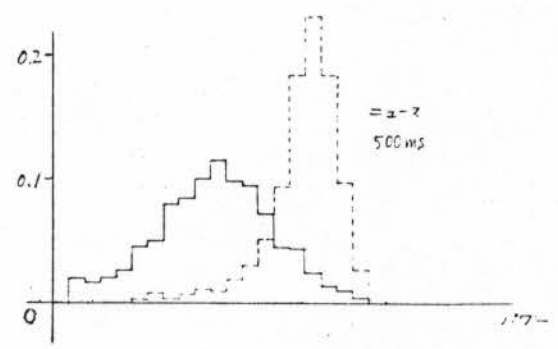
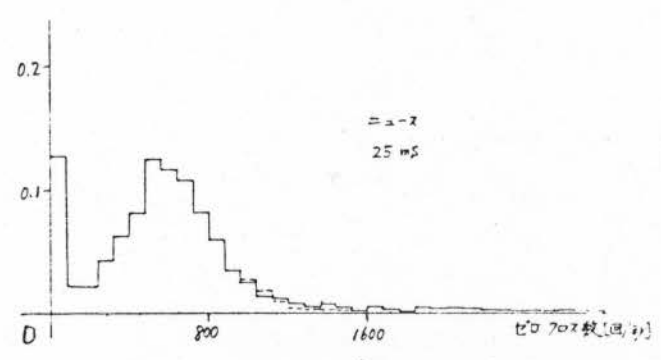
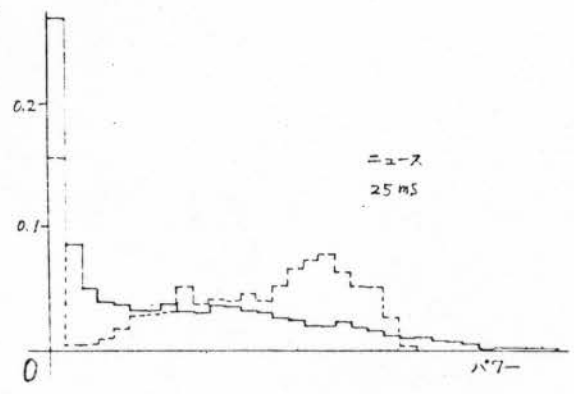


Fig. A-23  
度数分布ヒストグラム  
(英語ニュース)  
たて軸は相対度数  
破線は心理量  
右上は平均化時間

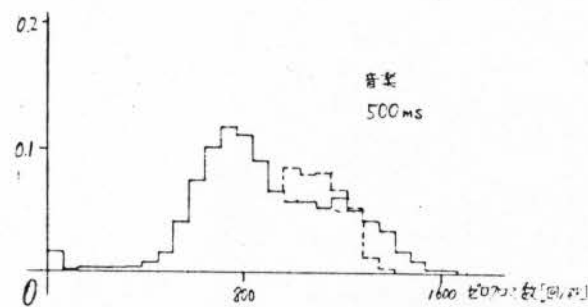
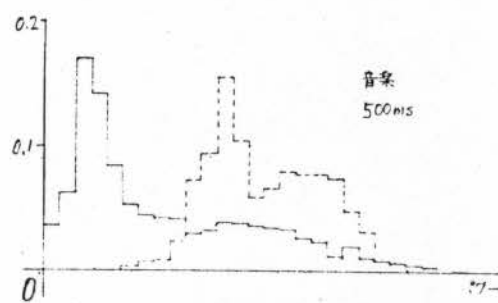
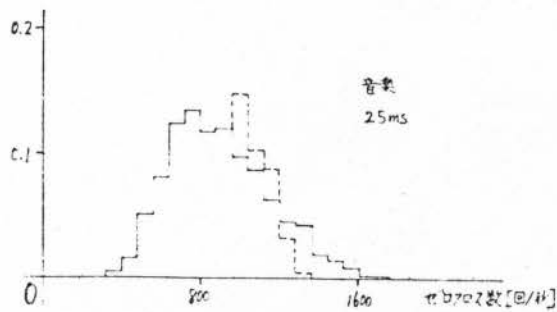
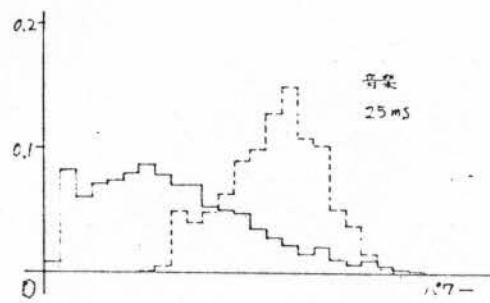


Fig. A-24

度数分布ヒストグラム  
(グランデンブルク協奏曲)

Fig. A-23 参照



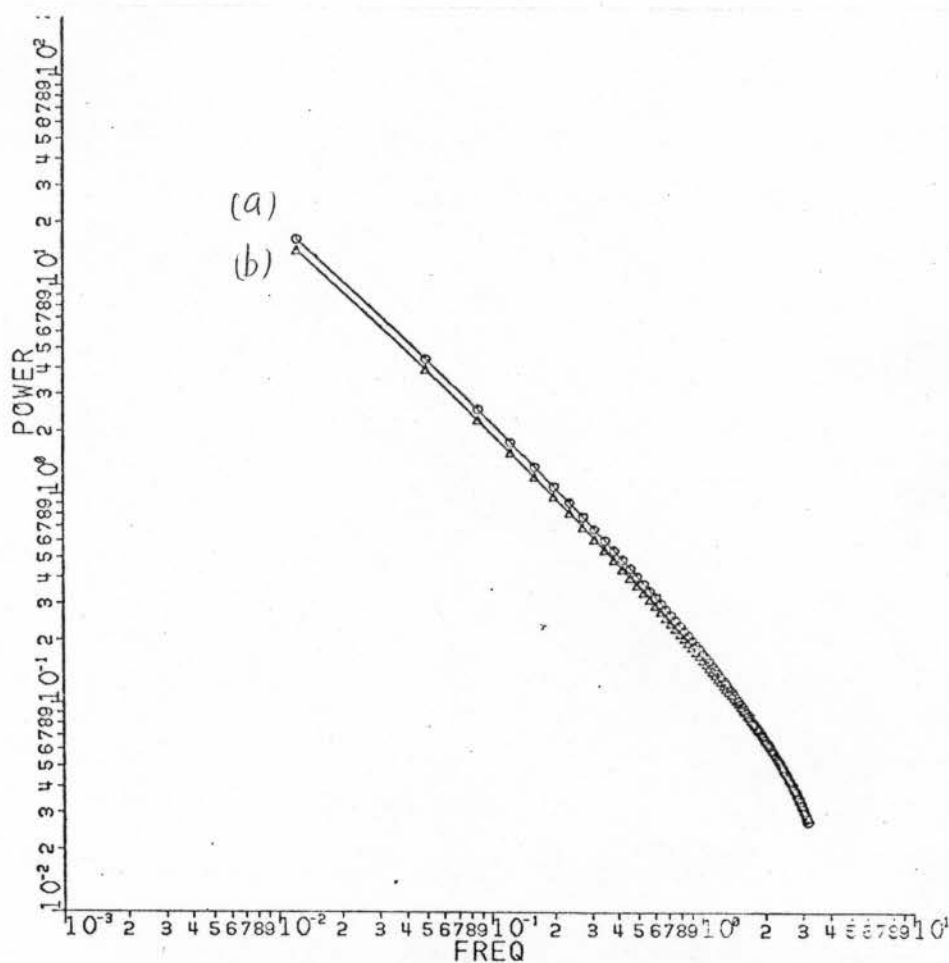


Fig. A-25

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} \bar{R}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad \text{\& 数值积分}$$

(a)  $\bar{R}_a(\tau)$  : (2-21A)参照、

(b)  $\bar{R}_b(\tau)$  : " "

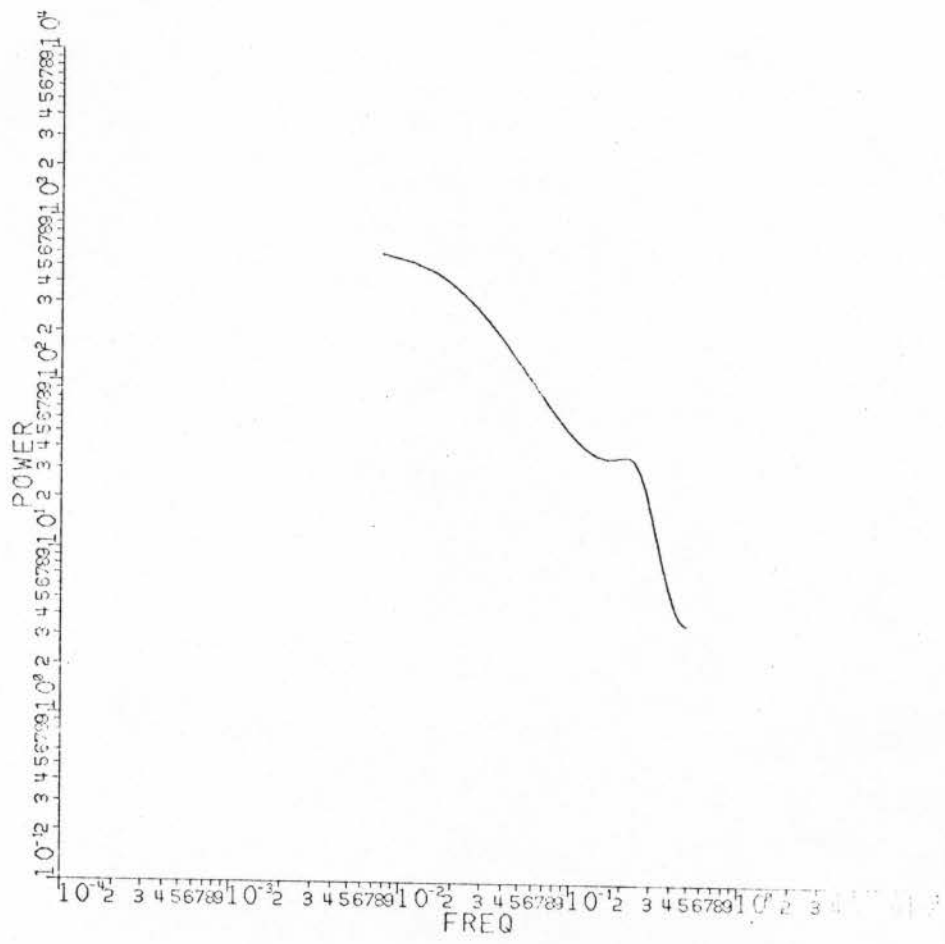


Fig. A-26

「旅愁」の楽符から高さの変化とテ-マとして  
読み、パ-ク-スペクトルを得たもの。

推定次数 4 , テ-マ数 128

モデルⅡの例のパワースペクトル

$$g(\omega) = \frac{1}{1+\omega Tj} \quad \text{を} \quad (2-23) \text{に適要お}$$

$$\begin{aligned} \overline{g(\omega)} &= \int_{\varepsilon}^N \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{1+\omega Tj} dT \\ &= \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_{\sqrt{\varepsilon\omega}}^{\sqrt{N\omega}} \left( \frac{1}{1+u^4} - j \frac{u^2}{1+u^4} \right) du \quad (A-1) \end{aligned}$$

$$\int_0^x \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (A(x) + B(x)) \quad (A-2)$$

$$\int_0^x \frac{u^2 du}{1+u^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (A(x) - B(x)) \quad (A-3)$$

$$A(x) = 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right), \quad B(x) = \log \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| \quad (A-4)$$

$$A(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}x + O(x^2) & x \ll 1 \\ 2\left(\pi - \frac{\sqrt{2}}{x} - O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) & x \gg 1 \end{cases} \quad (A-5)$$

$$B(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}x + O(x^2) & x \ll 1 \\ 2\sqrt{2}\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \gg 1 \end{cases} \quad (A-6)$$

(A-2)~(A-6)を使うと

$$\begin{aligned} \overline{g(\omega)} &= \left( \frac{2}{\sqrt{\omega}} \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \left\{ \begin{aligned} &A(\sqrt{N\omega}) + B(\sqrt{N\omega}) - A(\sqrt{\varepsilon\omega}) - B(\sqrt{\varepsilon\omega}) \\ &-j \left\{ A(\sqrt{N\omega}) - B(\sqrt{N\omega}) - A(\sqrt{\varepsilon\omega}) + B(\sqrt{\varepsilon\omega}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (A-7) \end{aligned}$$

$$\overline{P(\omega)} = |\overline{g(\omega)}|^2$$

$$= \frac{2}{8\omega} \left( A^2(\sqrt{N\omega}) + A^2(\sqrt{\varepsilon\omega}) + B^2(\sqrt{N\omega}) + B^2(\sqrt{\varepsilon\omega}) - 2A(\sqrt{N\omega})A(\sqrt{\varepsilon\omega}) - 2B(\sqrt{N\omega})B(\sqrt{\varepsilon\omega}) \right)$$

$$= \frac{2}{8\omega} \left( 4\pi^2 - 8\pi\sqrt{\frac{2}{N\omega}} - 8\pi\sqrt{2\varepsilon\omega} + O\left(\frac{1}{N\omega}\right) + O(\varepsilon\omega) \right) \quad (\text{A-8})$$

$$\sim \frac{\pi}{\omega} \left( \pi - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{T}{N\omega}} - 2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon\omega} \right) \quad (\text{A-9})$$

次に インパルス応答  $I(t)$ , ステップ応答  $H(t)$  を求める。

$$I(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{g(\omega_j)}) / I_0$$

$$= \frac{1}{I_0} \int_{\varepsilon}^N \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+T\omega_j}\right) \right) dT$$

$$= \frac{1}{I_0} \int_{\varepsilon}^N \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T} dT \quad (\text{A-10})$$

$$H(t) = \frac{1}{I_0} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\overline{g(\omega_j)}}{\omega_j}\right)$$

$$= \frac{1}{I_0} \int_{\varepsilon}^N \frac{1}{\sqrt{T}} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) dT \quad (\text{A-11})$$

$$T=\varepsilon \text{ まで } I_0 = \int_{\varepsilon}^N \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{N} - \sqrt{\varepsilon}) \quad (\text{A-12})$$

$\mathcal{L}^{-1}$  はラプラス逆変換を意味する。

(A-10)より

$$I(t) = \frac{1}{I_0} \frac{2}{\sqrt{t}} \int_{\sqrt{\frac{t}{N}}}^{\sqrt{\frac{t}{\varepsilon}}} e^{-u^2} du$$

(A-13)

(A-11)より

$$H(t) = 1 - \frac{2}{I_0} \int_{\sqrt{\frac{t}{N}}}^{\sqrt{\frac{t}{\varepsilon}}} \frac{e^{-u^2}}{u^2 \sqrt{t}} du$$

$$= 1 - \frac{2}{I_0} (\sqrt{N} e^{-\frac{t}{N}} - \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}})$$

$$+ \frac{1}{I_0} (2\sqrt{t}) \int_{\sqrt{\frac{t}{N}}}^{\sqrt{\frac{t}{\varepsilon}}} e^{-u^2} du$$

$$= 1 - \frac{2}{I_0} (\sqrt{N} e^{-\frac{t}{N}} - \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}}) + 2t I(t) \quad (A-14)$$

$$\therefore \int_0^x e^{-u^2} du = x + O(x^3) \quad x \ll 1$$

$$\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} \quad x \gg 1 \quad (A-15)$$

を用いると

$$I(t) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{I_0} \left( \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \left( \sqrt{\frac{t}{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{t}{N}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon N}} & t \ll \varepsilon \ll N \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{I_0} \left( \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{t}{N}} \right) & & \varepsilon \ll t \ll N \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{I_0} \left( \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \left( \sqrt{\frac{N}{t}} e^{-\frac{t}{N}} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \right) \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\approx \frac{e^{-\frac{t}{N}}}{2t}$$

$$\varepsilon \ll N \ll t$$

(A-16)

と近似できる。

(A-16) と

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \quad |x| \ll 1 \quad (\text{A-17})$$

を用いて

$$H(t) \doteq \begin{cases} \frac{2t}{I_0} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + 2tI_0 \\ = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon N}} & t \ll \varepsilon \ll N \\ \frac{2t}{I_0 \sqrt{N}} - \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{I_0} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + 2tI_0 \\ = \frac{2\sqrt{\pi t}}{I_0} - \frac{t}{N} & \varepsilon \ll t \ll N \\ 1 & \varepsilon \ll N \ll t \end{cases} \quad (\text{A-18})$$