

数学はどこから来たのか 数学はどう進むのか 数学はどこへ行くのか

～対称性を駆使した解析学と幾何学的手法による整数論の未解決問題と量子計算への挑戦～

Where does mathematics come from? How does it proceed? Where it goes?
- Challenges to unsolved problems in number theory and quantum computation by symmetry-based analysis and geometry -



基礎数学研究センタ
若山 正人
Masato Wakayama

●プロフィール

1978年東京理科大学理学部卒業。1985年広島大学大学院理学研究科博士課程修了。鳥取大学助教授、九州大学数理学研究院教授、同院長、九州大学主幹教授、同マス・フォア・インダストリ研究所長、理事・副学長を経て、2020年東京理科大学副学長・理学部教授、国立研究開発法人科学技術振興機構研究開発戦略センター上席フェロー。2021年10月NTT基礎数学研究センタ数学研究プリンシパル、同上席を兼務。九州大学名誉教授。専門は表現論・数論。

数学研究の目的は未だ見ぬ数学世界に光をあてることで。研究は既存の未解決問題の解決と新しい問題・テーマの発掘により進みます。予見し難いものの、進歩する数学がいつか役立つことは歴史が示しています。たとえば、素数の研究が現代のセキュリティを支え、非ユークリッド幾何学が相対論を通して全地球測位システムGPSを生みました。

数学研究の特質のひとつは、いろいろと散らばっているものをひとまとめにしていく点にあります。数学は多様な科学から刺激を受けつつ究極の抽象化も行ないます。数学内部に限らず、実験科学等からの題材においても、まったく離れ離れにみえていた事実を統一的・普遍的に理解しようとすることは数学のもつ本質的なはたらきです。長い間、互いに無縁なことであると信じられてきたものの間に、疑いようのない親近性や等価性が明らかにされていくことには価値があります。数学の研究は、種々の実験的事実が物理法則へと私たちを導いてくれることに似ていると述べたPoincaréの言葉もあります。そうしたことから数学は、世界の理解の要となる問題の『発見』や体系化による『視座の提供』にささげようとするものです。

今春、宮崎、Reyes-Bustos、堀永の3名が基礎数学研究センタに集いました。専門は順に、数論幾何学(Grothendieckのモチーフ理論に不足する困難部分の整備と開拓)、グラフ

理論・表現論(暗号分野等で待たれるRamanujan グラフの無限族の新しい構成と量子相互モデルの数論)、保型表現論(Deligne 予想に迫るL-関数の特殊値の幾何構造)です。

さて、日本のフィールズ賞はいずれも代数幾何学から生まれました。数論幾何(図形による整数論研究)はWeil予想解決のために代数幾何を再構築した Grothendieck が創始しました。Weil 予想の解決はDeligneです。また、それに連なる20世紀後半からの数学の巨大研究課題としてLanglands哲学(予想群)があります。その原点は表現論の解析的側面にあります(Weil への手紙[1])。背景にあったのはHarish Chandraのリー群の無限次元表現論とSelbergの跡公式の研究です。なお、表現論とは対称性の学問であり、保型表現論とは、楕円曲線に関する志村・谷山予想なども含む、表現論による保型形式の研究です。Fermatの最終定理の証明もLanglands哲学の一角をなす志村・谷山予想が要でした。プリンストン高級研究所など世界有数の大学等ではこの予想群の研究が活発です。また、その幾何学的変形版は物理学の究極理論といわれる弦理論の定式化にも使われています。さらにABC予想攻略に向け構築された望月のIUT理論と量子計算の課題には類似点があるとの指摘もあります。ただし、量子計算の研究では、未だ現代の代数幾何は使われていないようです。

講演者の関心は、対称性の観点からの数学の開拓です。今回は、量子コンピュータの構築の土台ともなり、理論・実験双方で活発な研究が進む量子光学の模型と数論を繋ぐ話をします[2]。具体的には、非可換調和振動子(NCHO [3])なる数学モデルと光と物質の相互作用を記述する量子ラビ模型(QRM)及びその非対称模型(AQRM)のエネルギースペクトルとそのゼータ関数を通じた数論がテーマです。実際、ゼータ関数の研究は物理でいえば系の分配関数(状態和)の研究と同等です。なお、それぞれのHeun微分方程式描像により、NCHOがQRMの被覆を定めることがわかります[4]。また、(A)QRMの理論は、超伝導人工原子と電磁場(光)の相互作用を測る実験結果[5]を見事に予言し、量子もつれの実現を強く示唆しました。量子もつれにより物質と光は情報の交換を行います。これにより量子コンピュータの基本素子ができます。

定理は発見によるものです。発明ではありません。したがって、紡ぎ方は数学者個人によりますが、そこにある事実(定理)は発見以前から存在していると思うのが妥当です。ところで近年、地球外高等生命の存在が示唆されています。正しければ、地球では未発見の定理が既に知られている可能性もあります。一方で、量子情報や量子計算などの研究からは、一見抽象的にみえる計算も物理法則から逃れられないように映ります。つまり“計算≦物理法則≦数学”なる包含関係があり、数学は宇宙より前にあったのかもしれませんが。地球上ではバビロニア数学には遅れます。その後も数学は脈々と進歩しています。講演では、現実の数学研究がどのように進むのかを、実際の動機や問題の立て方、アプローチなどを、メンバーの数学にも触れながら以下を例にお話しします：

●参考文献

- [1] Letter to André Weil, <https://publications.ias.edu/rpl/paper/43>
- [2] 若山正人, “光とゼータ関数の特殊値,” 日本数学会誌「数学通信」第25巻 第4号pp. 24-52, 2021.
- [3] A. Parmeggiani, M. Wakayama, “Oscillator representations and systems of ordinary differential equations,” *PNAS*, 98, pp. 26-30, 2001.
- [4] M. Wakayama, “Equivalence between the eigenvalue problem of non-commutative harmonic oscillators and existence of holomorphic solutions of Heun differential equations, eigenstates degeneration and Rabi model,” *Int. Math. Res. Not.*, 2016:145, pp. 759-794.
- [5] 布施智子, 吉原文樹, 角柳孝輔, 仙場浩一, “超伝導人工原子と電磁場の相互作用～強結合のその先へ～,” 「最近の研究から」日本物理学会誌 73, pp. 21-26, 2018.
- [6] T. Ichinose, M. Wakayama, “Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators,” *Comm. Math. Phys.*, 258, pp. 697-739, 2005.
- [7] K. Kimoto, M. Wakayama, “Apéry-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and automorphic integrals,” *Ann. Inst. Henri Poincaré - P*, (印刷中), 2020, - arXiv:1905.01775.
- [8] C. Reyes-Bustos, M. Wakayama, “Heat kernel for the quantum Rabi model,” - arXiv:1906.09597, 2020.
- [9] C. Reyes-Bustos, M. Wakayama, “Heat kernel for the quantum Rabi model: II. Propagators and spectral determinants,” *J. Phys. A: Math. Theor.* 54, pp.115202-115231, 2021.
- [10] M. Wakayama, “Symmetry of asymmetric quantum Rabi models,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, 50, pp. 174001-174020, 2017.
- [11] K. Kimoto, C. Reyes-Bustos, M. Wakayama, “Determinant expressions of constraint polynomials and the spectrum of the asymmetric quantum Rabi model,” *Int. Math. Res. Not.*, 2021:12, pp. 9458-9544.
- [12] C. Reyes-Bustos, D. Braak, M. Wakayama, “Remarks on the hidden symmetry of the asymmetric quantum Rabi model,” *J. Phys. A: Math. Theor.* 54, pp. 285202-285215, 2021.
- [13] C. Reyes-Bustos, M. Wakayama, “Degeneracy and hidden symmetry -- an asymmetric quantum Rabi model with an integer bias,” - arXiv:2106.08916, 2021.

- ①NCHOのスペクトルゼータ関数の特殊値が生む保型形式等の数論と楕円曲線[6,7]。
 - ②QRMの伝搬関数の解析的公式と無限対称群、経路積分、ゼータ関数[8,9]。
 - ③AQRMの縮退[10,11]と隠れた対称性[12]。ディオファントス幾何に繋がる課題や予想[13]。
- 将来、銀河系の知的生命との通信が実現されたとき、自信をもって交流ができるように地球の数学研究は向かうのでしょうか。

