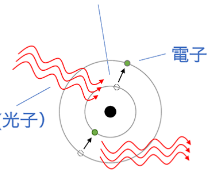
光と物質の相互作用におけるゼータ関数

どんな研究	光と物質の物理的相互作用を数学的に記述する**量子ラビモデル**は、量子コンピュータなど、社会に大きな影響を与える応用が期待される重要な研究対象です。本研究では、モデルのスペクトルゼータ関数を理解するために、モデルの時間発展を表す**熱核の明示的な計算方法**を考案しました。
どこが凄い	量子ラビモデルの熱核や分配関数は、経路積分等を用いた従来の手法では計算困難でした。これを克服するため、本研究では、**表現論**という代数学の理論を用いて**全く新しい計算手法**を開発しました。また、計算結果から、熱核の新たな物理的・数学的な解釈を得ることにも成功しました。
めざす未来	本研究の目標は量子ラビモデルから定まるスペクトルゼータ関数の**整数論**的な性質を明らかにすることでしたが、そのために開発した上記の手法は物理学的にも重要な価値を持っています。今後も整数論的な興味を出発点とする全く新しい視点から、物理的な性質を明らかにしていきます。

量子ラビモデル（QRM）

- 量子計算機や量子通信で利用される**光と物質**（原子など）の間の微細なスケールでの相互作用を記述する数学的モデル。
- QRMを用いた計算結果は実験結果と一致(Braak,2011)。
  しかしQRMから状態を数学的に厳密に求めることは極めて困難なため、従来研究は近似計算にとどまる。



光と物質（原子）の相互作用

光子のエネルギー　原子のエネルギー　相互作用（結合）のエネルギー

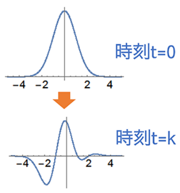
$$H_R = \boxed{\omega a^\dagger a} + \boxed{\Delta \sigma_z} + \boxed{g(a + a^\dagger)\sigma_x}$$

QRMを定義する式（ハミルトニアン）

熱核と時間発展

本研究の成果①

光と物質の相互作用の**時間発展**を数学的に厳密に求める方法である「**熱核**」の計算に成功。



量子状態（エネルギー分布）の時間発展

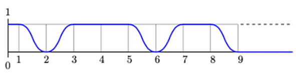
従来法

「無限個の連続経路に沿った積分」を用いる経路積分
➡ 厳密な取り扱いが極めて困難

（図の出展：Wikipedia）

提案法

離散的な経路での積分により計算
➡ 従来困難だった計算を可能に



応用

- 熱核K_Rを具体的な形で記述 ➡ 物理系の解析も可能に[1][2]

$$K_R(x,y,t) = K(x,y,t;g)\sum_{\lambda=0}^{\infty}(t\Delta)^{\lambda}\,\Phi_{\lambda}(x,y,t;g)$$

t:時間　量子調和振動子（より簡単な対象）の熱核　積分により計算される行列

- 提案法において、数学のさまざまな分野の技術を組み合わせた全く新しい手法を開発
  ➡ QRMだけでなく、より広い種類の物理モデルの熱核の計算にも利用可能

幾何学 ➡ 熱核の計算 ⬅ 関数解析
表現論 ➡ 熱核の計算 ⬅ 組み合わせ論

ゼータ関数との関係

熱核とゼータ関数の関係

熱核に関する研究は、次のような不思議な式と関係する

★: $1+1+1+1\cdots$ "=" $-\frac{1}{2}$　☼: $1+2+3+4\cdots$ "=" $-\frac{1}{12}$

無限大に発散する式と有限な値を結びつける（厳密でない）式、18世紀の数学者が発見

これは、有名な「リーマン予想」に現れる**リーマンゼータ**関数の「**解析接続**」と呼ばれる性質の一部。この関数は素数の性質に関する重要な情報を持ち、これを調べることで数学が大きく発展。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \Re(s) > 1$$

リーマンゼータ関数

★: $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$　☼: $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$

解析接続によって得られた発散級数の値

驚くべきことに、QRMのエネルギーレベル $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots)$を用いてリーマンゼータ関数に似た「**スペクトルゼータ関数**」を定義可能。

$$\zeta_R(s;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n+\tau)^s},\quad \Re(s) > 1$$

スペクトルゼータ関数

実は、この関数の性質を調べることが、本研究の主な動機であり、特に解析接続をもつことの証明が目標。

本研究の成果②

スペクトルゼータ関数は熱核がわかれば次のように積分表示でき、解析接続を持つことを証明可能[2](Sugiyama,2018)。本研究によりQRMの熱核を書き下すことで、解析接続の証明を完成した。

$$\zeta_R(s;\tau) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{0+}(-\omega)^{s-1}e^{-\tau\omega}\,Tr\Big(\int_{-\infty}^{\infty}K_R(\omega,\omega,t)dt\Big)d\omega \qquad s\in\mathbb{C}$$

QRMのスペクトルゼータ関数の積分表示

今後の展開

本研究はリーマンゼータ関数の**特別な値**（$\zeta(3)$など）とスペクトルゼータ関数の値との間の驚くべき共通構造の一端を見出した。
今後はその背後のメカニズムの解明をめざす。

光と物質の間の相互作用の理解
- エネルギー
- 時間発展

量子ラビモデル(QRM) ― ゼータ関数を通じた深いつながり（算術構造） ― リーマンゼータ関数

基礎数学の重要な対象への理解
- 保型形式
- 楕円曲線

ゼータ関数の謎の解明に挑むことで、基礎数学の発展と応用をめざす

関連文献

[1] C. Reyes-Bustos, M. Wakayama, “The heat kernel for the quantum Rabi model”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 26, No. 5, pp. 1347-1447, 2022.
[2] C. Reyes-Bustos, M. Wakayama, “Heat kernel for the quantum Rabi model: II. Propagators and spectral determinants”, *J. Phys. A: Math. Theor.* , Vol. 54, 115202, 2021.

連絡先

シッド レジェス ブストス（Cid Reyes Bustos）
メディア情報研究部 情報基礎理論研究グループ（NTT基礎数学研究センタ）