Series expansion and structure theorem on automorphic forms

保型形式の級数展開と構造定理

代数・幾何・解析をつなぎ新たな発見をめざす

どんな研究	３００年以上にわたり未解決だったフェルマーの最終定理の証明では、代数・幾何・解析といった数学の領域をつなぐ「保型形式」の理論が決定的な役割を果たしました。この理論の拡張に向け、対象とするクラスの保型形式の構成方法とその級数展開を決定しました。
どこが凄い	保型形式は非常に滑らかな関数で、かつ強い対称性を持ちます。既存の保型形式の枠組みを超える数学的発見のためには、滑らかさの条件を緩めることが必要ですが、その分、解析が困難になります。解析が可能でありつつ条件を緩めたうえで、解析手法と構成方法を明らかにしました。
めざす未来	保型形式の理論を通じ、ムーンシャイン予想など大きな予想が解決されてきました。その中には最密球充填問題等の自然現象に潜む数学に関するものも多くあります。本研究を基礎とし、更なる数学的発見を行い、ラングランズ予想など数学の大予想の解決にも貢献することをめざします。

フェルマー予想とその発展

フェルマー予想
有理数 x、y、z が $x^n + y^n = z^n$ を満たすとき $xyz = 0$

- フェルマー（1607-1665）が予想し、300 年以上後の 1995 年に A. Wiles が証明。
- 方程式を変形して楕円曲線の問題に帰着。志村谷山予想の（部分的）解決が鍵。

志村谷山予想
次の 3 種の対象がゼータ関数を通じて”対応”する：

➢ ラングランズプログラムとは、上記関係を一般化して数学の主要分野を統一する壮大な取り組み。

保型形式

保型形式とは

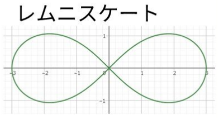
➢ 楕円やレムニスケートの周長に関する1800 年代の研究が発端。
➢ 志村谷山予想における解析的対象。
➢ 複素数の関数で以下を満たす：
- 正則関数（非常に滑らかな関数）
- 保型性

$$f((az+b)/(cz+d)) = (cz+d)^k f(z)$$

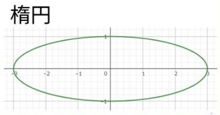
a, b, c, d: 整数,　$ad - bc = 1$
z: 複素数,虚部>0

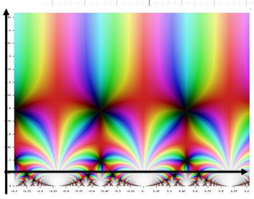
✓フーリエ展開可能
✓ラングランズプログラムの拡張に向けて正則性の条件を外したい

レムニスケート



楕円

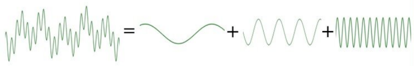




※周期性
$z \mapsto z+1$ 対称
※単位円について対称
$z \mapsto -1/z$ 対称
※関数の値を色で表示

保型形式とフーリエ展開

フーリエ展開



- 周期関数の級数展開
- 元の関数 $f(x)$ を係数 $c_n(f)$ を通じて研究可能

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,(\cos(nx) + i\sin(nx))$$

複素数

保型形式のフーリエ展開

$$f(z) = f(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f,y)(\cos(nz) + i\sin(nz))$$

✓ 保型性から（x について）フーリエ展開可能
✓ 正則性から係数 $c_n(f,y)$ は複素数とみなすことが可能

問い: 非正則な保型形式に対する係数 $c_n(f,y)$ は何か？

提案法と得られた成果

課題: 単に正則性を外しても、問題として定式化できない

✓良い一般化とその解析手段とを並行に考えるべき

良い一般化とは	解析する手段とは
• 既存の理論（正則）を含む • ラングランズプログラムでは「表現」が重要	• 離散系列表現の核となる性質 (極小K-typeの理論)
離散系列「表現」を生成する保型形式	保型形式の係数 $c_n(f,y)$ の微分方程式を通じた研究

得られた成果: 非正則に跨る基本的かつ重要なクラス*を考え、それら構成方法を初めて完全に決定し、さらなる解析の基盤を作りました [1]。

*$Sp_4(\mathbb{R})$上の離散系列表現に対する非尖点的保型形式

今後の展開

ラングランズプログラムはゼータ関数を通じて整数論を理解しようという取り組みです。今後は、係数$c_n(f,y)$とゼータ関数の関係を具体的な対象を通じて考察します。

関連文献

[1] S. Horinaga, H. Narita, “Cuspidal components of Siegel modular forms for large discrete series representations of $Sp_4(\mathbb{R})$,” *manuscripta mathematica*, pp. 1-44, 2023

連絡先

堀永 周司 (Shuji Horinaga) メディア情報研究部　情報基礎理論研究グループ ／ 基礎数学研究センタ