Partial resolution of Morton-Vivaldi's conjecture

Morton-Vivaldiの予想の部分的解決

数論的力学系分野の未解決問題を解決！

どんな研究	気象などのカオスな振舞は、時間を離散化して近似して調べられます。**放物型パラメータ**は離散化した状況のカオスを支配している重要な量で、**デルタ因子**と呼ばれる有理数係数の多項式の解になります。本研究では、デルタ因子の**整数論的な性質**に関する最近の進展を紹介します。
どこが凄い	デルタ因子が、特定の変換後に**整数係数**になるか、**因数分解**ができるかという整数論的な性質の証明は、自明な場合を除き未解決でした。本研究では、放物型パラメータと整数論の**オイラートーシェント関数**との新たな繋がりを見出すことで、画期的なブレイクスルーを与えました。
めざす未来	カオスな振舞（力学系）と数の性質（整数論）を結ぶ研究分野は**数論的力学系**と呼ばれ、この20年で急速に発展してきました。今後も、両分野の手法・知見を双方向的に活用し、力学系に現れる整数論的現象の解明をめざします。

多項式の反復代入の振る舞い

c: 複素数のパラメータ

複素数を多項式 $f_c(x)=x^2+c$ に代入して、出力を再度代入することを繰り返すとき、点の軌道は 周期的？収束？発散？

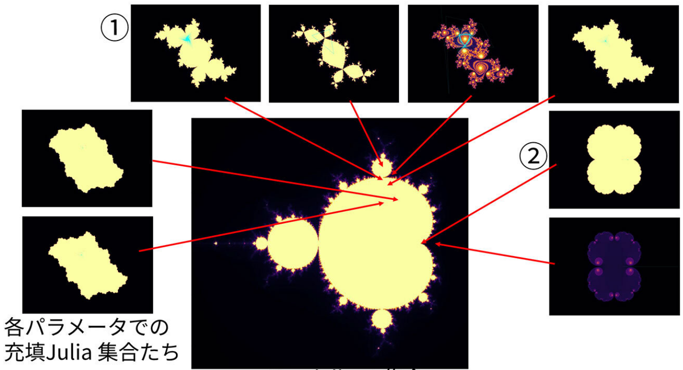
例: $c=\frac{1}{4}$ のときの0のf_c-軌道

$$0 \mapsto \frac{1}{4} \mapsto \frac{5}{16} \mapsto \frac{89}{256} \mapsto \frac{24305}{65536} \mapsto \cdots \xrightarrow{\text{収束}} \frac{1}{2} \circlearrowleft$$

充填Julia集合 $K_c=\{\, f_c\text{-軌道が発散しない複素数 } x\}$

Mandelbrot 集合 $M=\{K_c\text{がひとまとまりになる } c\}$

$=\{0\text{ の}f_c\text{-軌道が発散しないような複素数 } c\}$



各パラメータでの充填Julia 集合たち

Mandelbrot 集合

Mandelbrot 集合の内部のパラメータcに対しては、0のf_c-軌道は周期軌道に収束します。この周期軌道の周期はMandelbrot集合の領域ごとに一定です。“サボテンの付け根”(①など) や“くぼみの底”(②など) を境に、この**周期は整数倍に変化**して力学系の様子も大きく変わります。

放物型パラメータ

“サボテンの付け根”と“くぼみの底”のパラメータを**放物型パラメータ**と呼びます。

Mandelbrot集合について詳しく調べる上では放物型パラメータ付近での摂動がよく使われていて、複素力学系における重要な値です。図形的に特殊なところにある値ですが、こうした値は整数論的にも特殊な性質を持ちがちで、力学系と整数論を繋ぐ可能性を秘めています。

デルタ因子

正の整数mとm の倍数nを固定すると、“周期m領域”と “周期n領域”の間の放物型パラメータcたちはある有理数係数多項式 $\Delta_{n,m}(c)$ の解になります。[4]
これらの多項式を**デルタ因子**と呼びます。

degree	(n,m)	$\Delta_{n,m}(C/4)$ for $f_c(z)=z^2+c$
1	$(1,1)$	$C-1$
	$(2,1)$	$C+3$
	$(4,2)$	$-C-5$
	$(3,3)$	$C+7$
2	$(3,1)$	C^2+C+7
	$(4,1)$	C^2-2C+5
	$(6,1)$	C^2-3C+3
	$(6,2)$	$C^2+9C+21$
	$(8,2)$	$C^2+8C+17$
	$(12,2)$	$C^2+7C+13$
3	$(6,3)$	$C^3+8C^2+18C+81$
	$(4,4)$	$C^3+9C^2+27C+135$
4	$(5,1)$	$C^4+C^3+C^2-9C+31$
	$(8,1)$	$C^4+2C^2-16C+17$
	$(10,1)$	$C^4-3C^3+9C^2-17C+11$
	$(12,1)$	$C^4+2C^3-C^2-14C+13$
	$(10,2)$	$C^4+17C^3+108C^2+313C+341$
	$(16,2)$	$C^4+16C^3+96C^2+256C+257$
	$(20,2)$	$C^4+15C^3+85C^2+215C+205$
	$(24,2)$	$C^4+16C^3+95C^2+248C+241$
5	$\varnothing$	$\varnothing$

1995年に$\Delta_{n,m}$が定義されたとき、次の予想が立てられました。

予想 [Morton-Vivaldi, 1995]
(1) $C=4c$ とすると、デルタ因子はCに関する多項式であり最高次数の係数は ±1 となる。
(2) すべての$\Delta_{n,m}$は既約である(つまり因数分解できない)。

本研究の成果

予想されて以降、自明な場合 $(m=1,2)$を除き手つかずの状況でした。

本研究では**放物型パラメータとオイラートーシェント関数との関係を発見**することで、ブレイクスルーを与えました。

証明した定理 (1) 予想 1 は正しい。[2], **[5]**
(2) $m=3$ のとき予想 2 は正しい。**[3]**
(3) $\Delta_{n,m}$がd次 $(d=1,2)$ の有理数係数多項式で割り切れるのは $\Delta_{n,m}$自体がd次のときのみ。
さらにこれは以下の(m,n)のときである。
$d=1$: $(m,n)=(1,1),(1,2),(2,4),(3,3)$ [1],**[5]**
$d=2$: $(m,n)=(1,4),(2,8),(1,3),(1,6),(2,6),(2,12)$ **[5]**

関連文献

[1] X. Buff, S. Koch, “Totally real points in the Mandelbrot Set,” *preprint*, arXiv: 2211.15725, 2022, under review.
[2] V. Huguin, “Unicritical Polynomial Maps with Rational Multipliers,” *Conformal Geometry and Dynamics,* Volume 25, pp. 79-87, 2021.
[3] J. Koizumi, Y. Murakami, K. Sano, K. Takehira, “Irreducibility of polynomials defining parabolic parameters of period 3,” *Acta. Arithmetica,* Volume 221, pp. 253-270, 2025.
[4] P. Morton, F. Vivaldi, “Bifurcations and discriminants for polynomial maps,” *Nonlinearity* 8, No.4, pp. 571-584, 1995.
[5] Y. Murakami, K. Sano, K. Takehira, “Arithmetic properties of multiplier polynomials for certain polynomial maps,” preprint, arXiv:2403.17315v3, 2024, under review.

連絡先

佐野 薫（Kaoru Sano）メディア情報研究部 情報基礎理論研究グループ／基礎数学研究センタ

共同研究先・外部資金

本展示の成果は理化学研究所、東北大学、九州大学との共同研究によるものです。
本研究は、日本学術振興会（JSPS）科研費（JP22J20698、JP23KJ1675、 JP20K14300、JP22J20227）の助成、および東北大学 卓越大学院プログラム「AIエレクトロニクス（WISE Program for AI Electronics）」の支援を受けて実施しました。